Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans :

a) P d'équation $2\,x + y - 3\,z + 1 = 0$

b) Q d'équation $x + 2\,z + 4 = 0$

c) R d'équation $z = 3\,x - y$

2°) Soit P' le plan d'équation $4\,x - 3\,y + z - 4 = 0$.
P et P' sont-ils sécants ? Quelle est la nature de leur intersection ?

Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans :

a) P d'équation $2\,x+y-3\,z+1=0$

b) Q d'équation $x+2\,z+4=0$

c) R d'équation $z=3\,x-y$

2°) Soit P' le plan d'équation $4\,x-3\,y+z-4=0$.
P et P' sont-ils sécants ? Quelle est la nature de leur intersection ?

1°) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans :

a) P d'équation $2\,x + y - 3\,z + 1 = 0$

b) Q d'équation $x + 2\,z + 4 = 0$

c) R d'équation $z = 3\,x - y$

2°) Soit P' le plan d'équation $4\,x - 3\,y + z - 4 = 0$.
P et P' sont-ils sécants ? Quelle est la nature de leur intersection ?

1°) a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans :

a) P d'équation $2\,x + y - 3\,z + 1 = 0$

b) Q d'équation $x + 2\,z + 4 = 0$

c) R d'équation $z = 3\,x - y$

2°) Soit P' le plan d'équation $4\,x - 3\,y + z - 4 = 0$.
P et P' sont-ils sécants ? Quelle est la nature de leur intersection ?

1°) a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans :

a) P d'équation $2\,x + y - 3\,z + 1 = 0$

b) Q d'équation $x + 2\,z + 4 = 0$

c) R d'équation $z = 3\,x - y$

2°) Soit P' le plan d'équation $4\,x - 3\,y + z - 4 = 0$.
P et P' sont-ils sécants ? Quelle est la nature de leur intersection ?

1°) a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2°) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}_P$ donc P et P' sont sécants. Leur intersection est donc une droite.

Exercice II (plan défini par une orthogonalité)

1°) Trouvez une équation des plans connaissant un point K et un vecteur normal $\vec{n}$:

a) Pour le plan P_1 : $K\ (4\,;\,2\,;\,1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$;

b) Pour le plan P_2 : $K\ (1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

c) Pour le plan P_3 : $K\ (0\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

Exercice II (plan défini par une orthogonalité)

1°) Trouvez une équation des plans connaissant un point K et un vecteur normal $\vec{n}$:

a) Pour le plan P_1 : $K\ (4\,;\,2\,;\,1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$;

b) Pour le plan P_2 : $K\ (1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

c) Pour le plan P_3 : $K\ (0\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

1°) a) $P_1 : -x + 2z + d = 0$ puis utilisation des coordonnées de K : $-4 + 2 \times 1 + d = 0$ donc $d = 2$ donc $P_1 : -x + 2z - 2 = 0$.

b) Pour le plan P_2 : $K\ (1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

b) Pour le plan P_2 : $K\ (1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

$P_2 : -3z + d = 0$ puis utilisation des coordonnées de K : $-3 \times (-2) + d = 0$ donc $d = -6$ donc $P_2 : -3z - 6 = 0$ ou encore $z = -2$.

c) Pour le plan P_3 : $K\ (0\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

c) Pour le plan P_3 : $K\ (0\,;\,-2\,;\,3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

$P_3 : 1x - 1y + 4z + d = 0$ puis utilisation des coordonnées de $K : 0 - (-2) + 4 \times 3 + d = 0$ donc $d = -14$ donc $P_3 : x - y + 4z - 14 = 0$.

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$.
Donnez une équation du plan perpendiculaire à (AC) et passant par B.

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$.
Donnez une équation du plan perpendiculaire à (AC) et passant par B.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = 2 \\ y_C - y_A = 3 \\ z_C - z_A = 0 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal donc l'équation du plan s'écrit $2x + 3y + d = 0$, puis en utilisant les coordonnées de B : $3 + d = 0$ donc $d = -3$; l'équation est $2x + 3y - 3 = 0$.

Exercice III (plan passant par trois points)

Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

2°) Cherchez une équation du plan (BDE).

3°) Entraînement : cherchez l'équation de deux autres plans quelconques et vérifiez chez vous avec Geogebra...

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\times 0-(-2)\times 3\\-2\times 2-(-1)\times 0\\-1\times 3-2\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\-7\end{pmatrix}.$$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ donc $(ABC) : 6x - 4y - 7z + d = 0$, puis en utilisant les coordonnées de B (par exemple) : $-4 + d = 0$ donc $d = 4$; une équation de (ABC) est donc $6x - 4y - 7z + 4 = 0$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

b) $(ABC) : 6x - 4y - 7z + 4 = 0$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC).

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

b) $(ABC) : 6x - 4y - 7z + 4 = 0$.

c) Il suffit de vérifier que $6x_D - 4y_D - 7z_D + 4 = 0$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Cherchez une équation du plan (BDE).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Cherchez une équation du plan (BDE).

2°) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\times 2-(-4)\times 0\\-4\times(-3)-(-4)\times 2\\-4\times 0-1\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\20\\3\end{pmatrix}.$$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Cherchez une équation du plan (BDE).

2°) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\times 2-(-4)\times 0\\-4\times(-3)-(-4)\times 2\\-4\times 0-1\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\20\\3\end{pmatrix}.$$

C'est un vecteur normal donc l'équation du plan s'écrit $2x+20y+3z+d=0$, puis en utilisant les coordonnées de B (par exemple) : $20+d=0$ donc $d=-20$; une équation de (BDE) est donc $2x+20y+3z-20=0$.

Exercice IV (droite passant par deux points)

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de (AC).

2°) Donnez une représentation paramétrique de (BD).

3°) Entraînement : cherchez une représentation paramétrique d'une autre droite et vérifiez chez vous avec Geogebra.

4°) Le point E appartient-il à la droite (AC) ?

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de (AC).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de (AC).

Le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AC) donc la droite (AC) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -1+3t \\ z & = & 2 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ ou

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2t \\ y & = & 2+3t \\ z & = & 2 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Donnez une représentation paramétrique de (BD).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Donnez une représentation paramétrique de (BD).

Le vecteur $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BD) donc la droite (BD) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -4t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ ou

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4-4t \\ y & = & 2+t \\ z & = & -4-4t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

4°) Le point E appartient-il à la droite (AC) ?

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

4°) Le point E appartient-il à la droite (AC) ?

Il faut voir si les coordonnées de E sont compatibles avec une représentation paramétrique de (AC). Si oui, alors il existe un t tel que : $\left\{\begin{array}{rcl} -3 & = & 1+2t \\ 1 & = & -1+3t \\ 2 & = & 2 \end{array}\right.$

La première équation donne $2t = -4$ donc $t = -2$ puis en remplaçant dans la deuxième : $1 = -1 + 3 \times (-2)$ donc $1 = -7$:

t n'existe pas donc $E \notin (AC)$.

Il était aussi possible de regarder si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice V (droite définie par une orthogonalité)
$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) En utilisant l'équation trouvée dans l'exercice III, donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par C.

2°) Même question avec la droite perpendiculaire au plan (BDE) et passant par B.

3°) Entraînement : trouvez l'équation d'un plan quelconque avec Geogebra puis trouvez une représentation paramétrique d'une droite perpendiculaire à ce plan, passant par un point quelconque et vérifiez avec Geogebra.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) En utilisant l'équation trouvée dans l'exercice III, donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par C.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) En utilisant l'équation trouvée dans l'exercice III, donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par C.
Soit (Δ) cette droite.
Le plan (ABC) a pour équation $6x - 4y - 7z + 4 = 0$ (cf. Exercice III) donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour ce plan.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) En utilisant l'équation trouvée dans l'exercice III, donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par C.
Soit (Δ) cette droite.
Le plan (ABC) a pour équation $6x - 4y - 7z + 4 = 0$ (cf. Exercice III) donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-4\\-7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour ce plan.

Comme $(\Delta) \perp (ABC)$, le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) donc elle a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+6t \\ y & = & 3-4t \\ z & = & 2-7t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (BDE) et passant par B.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (BDE) et passant par B.
Soit (Δ') cette droite.
Le plan (BDE) a pour équation $2x + 20y + 3z - 20 = 0$ (cf. Exercice III) donc le vecteur $\vec{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour ce plan.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) Représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (BDE) et passant par B.

Soit (Δ') cette droite.

Le plan (BDE) a pour équation $2x + 20y + 3z - 20 = 0$ (cf. Exercice III) donc le vecteur $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour ce plan.

Comme $(\Delta') \perp (DBE)$, le vecteur $\vec{n'}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ') donc elle a pour représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 + 2t = 2t \\ y & = & 1 + 20t \\ z & = & 0 + 3t = 3t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$

Exercice VI (intersection droite/plan)

1°) Déterminez le point d'intersection entre la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 - 3\,t \\ y = 1 + t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -4 \end{cases}$$

et le plan (P) d'équation $2\,x + 5\,y - z - 7 = 0$.

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

a) Trouver une équation de (BDE) avec Geogebra.

b) Déterminez le point d'intersection entre la droite (AC) et (BDE).

1°) Déterminez le point d'intersection entre la droite (d) de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2-3\,t \\ y & = & 1+t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z & = & -4 \end{array}\right.$$

et le plan (P) d'équation $2\,x+5\,y-z-7=0$.

1°) Déterminez le point d'intersection entre la droite (d) de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2-3\,t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -4 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

et le plan (P) d'équation $2\,x+5\,y-z-7=0$.

Soit K ce point. Ses coordonnées vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2-3\,t \\ y=1+t \\ z=-4 \\ 2\,x+5\,y-z-7=0 \end{array}\right. \qquad \text{d'où}$$

$2(-2-3t)+5(1+t)-(4)-7=0$ ce qui donne $t=-2$ donc $x=-2-3(-2)=4\,;\ y=1+(-2)=-1\,;\ z=-4$.

Conclusion : $K\ (4\,;\ -1\,;\ -4)$.

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

a) Trouver une équation de (BDE) avec Geogebra.

b) Déterminez le point d'intersection entre la droite (AC) et (BDE).

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

a) Trouver une équation de (BDE) avec Geogebra.

b) Déterminez le point d'intersection entre la droite (AC) et (BDE).

2°) a) Geogebra donne comme équation $2x + 20y + 3z = 20$.

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

a) Trouver une équation de (BDE) avec Geogebra.

b) Déterminez le point d'intersection entre la droite (AC) et (BDE).

2°) a) Geogebra donne comme équation $2x + 20y + 3z = 20$.

b) (AC) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -1 + 3\,t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

2°) Soient $A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

a) Trouver une équation de (BDE) avec Geogebra.

b) Déterminez le point d'intersection entre la droite (AC) et (BDE).

2°) a) Geogebra donne comme équation $2x + 20y + 3z = 20$.

b) (AC) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2\,t \\ y & = & -1+3\,t \\ z & = & 2 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

Le système $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\,t \\ y = -1+3\,t \\ z = 2 \\ 2\,x + 20\,y + 3\,z = 20 \end{array}\right.$ donne

$2(1+2t) + 20(-1+3t) + 3(2) = 20$ ce qui donne $t = 0,5$

donc $x = 1 + 2(0,5) = 2\,;\ y = -1 + 3(0,5) = 0,5\,;\ z = 2$.

Conclusion : $(AC) \cap (BDE) = (2\,;\,0,5\,;\,2)$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

Exercice VII (projection orthogonale d'un point sur une droite)

1°) a) En utilisant une représentation paramétrique de la droite (AC), calculez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

b) Déduisez-en la distance entre B et (AC).

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) En utilisant une représentation paramétrique de la droite (AC), calculez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

b) Déduisez-en la distance entre B et (AC).

Soit K le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

a) D'une part, $K \in (AC)$ donc il existe un t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_K & = & 1+2t \\ y_K & = & -1+3t \\ z_K & = & 2 \end{array}\right.$$

D'autre part, $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Or $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} x_K - x_B \\ y_K - y_B \\ z_K - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2+3t \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$2(1+2t)+3(-2+3t)+0(2) = 0$ ce qui donne $t = \dfrac{4}{13} \ldots$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) En utilisant une représentation paramétrique de la droite (AC), calculez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

b) Déduisez-en la distance entre B et (AC).

a) (fin) $t = \dfrac{4}{13}$ donc $\begin{cases} x_K &= 1 + 2 \times \dfrac{4}{13} = \dfrac{21}{13} \\ y_K &= -1 + 3 \times \dfrac{4}{13} = -\dfrac{1}{13} \\ z_K &= 2 \end{cases}$ donc

$$K\left(\frac{21}{13}\,;\,-\frac{1}{13}\,;\,2\right).$$

$A(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B(0\,;\,1\,;\,0)$, $C(3\,;\,2\,;\,2)$, $D(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) a) En utilisant une représentation paramétrique de la droite (AC), calculez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

b) Déduisez-en la distance entre B et (AC).

a) (fin) $t = \dfrac{4}{13}$ donc $\begin{cases} x_K &= 1 + 2 \times \dfrac{4}{13} = \dfrac{21}{13} \\ y_K &= -1 + 3 \times \dfrac{4}{13} = -\dfrac{1}{13} \\ z_K &= 2 \end{cases}$ donc

$K\left(\dfrac{21}{13}\,;\,-\dfrac{1}{13}\,;\,2\right)$.

b) La distance entre le point B et la droite (AC) est la distance BK.

$BK = \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2 + (z_K - z_B)^2} = \sqrt{\dfrac{101}{13}} \simeq 2,79$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD).
Soit L le projeté orthogonal de E sur la droite (BD). $L \in (BD)$

donc il existe un t tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & 0 - 4\,t = -4\,t \\ y_L & = & 1 + t \\ z_L & = & 0 - 4\,t = -4\,t \end{array}\right.$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD).
Soit L le projeté orthogonal de E sur la droite (BD). $L \in (BD)$

donc il existe un t tel que $\begin{cases} x_L &=& 0-4\,t=-4\,t \\ y_L &=& 1+t \\ z_L &=& 0-4\,t=-4\,t \end{cases}$

$\overrightarrow{EL} \perp \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{EL} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Or $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} x_L - x_E \\ y_L - y_E \\ z_L - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+3 \\ t \\ -4t-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc

$-4(-4t+3)+0(t)-4(-4t-2)=0$ ce qui donne $t=\dfrac{1}{8}$ puis

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD).

Soit L le projeté orthogonal de E sur la droite (BD). $L \in (BD)$ donc il existe un t tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & 0 - 4\,t = -4\,t \\ y_L & = & 1 + t \\ z_L & = & 0 - 4\,t = -4\,t \end{array}\right.$

$\overrightarrow{EL} \perp \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{EL} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Or $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} x_L - x_E \\ y_L - y_E \\ z_L - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+3 \\ t \\ -4t-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc

$-4(-4t+3) + 0(t) - 4(-4t-2) = 0$ ce qui donne $t = \dfrac{1}{8}$ puis

$\left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & -4 \times \dfrac{1}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ y_L & = & 1 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{8} \\ z_L & = & -4 \times \dfrac{1}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ donc $L\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{9}{8}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD).

La distance entre le point E et la droite (BD) est la distance EL.

$EL = \sqrt{(x_L - x_E)^2 + (y_L - y_E)^2 + (z_L - z_E)^2} = \sqrt{\dfrac{801}{64}} \simeq 3,54$.

Exercice VIII (projection orthogonale d'un point sur un plan)

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

Pour rappel, une équation du plan (ABC) est
$6\,x - 4\,y - 7\,z + 4 = 0$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à (ABC) et passant par E.

2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (ABC).

b) En déduire la distance entre le point E et le plan (ABC).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à (ABC) et passant par E.

Nommons (Δ) cette droite.
$6x - 4y - 7z + 4 = 0$ est une équation du plan (ABC) donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour (ABC) et donc un vecteur directeur pour (Δ).
Comme $E \in (\Delta)$, une représentation paramétrique de (Δ) est

donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3 + 6t \\ y & = & 1 - 4t \\ z & = & 2 - 7t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$, $\quad B\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $\quad C\,(3\,;\,2\,;\,2)$, $\quad D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $\quad E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (ABC).

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2),\quad B\,(0\,;\,1\,;\,0),\quad C\,(3\,;\,2\,;\,2),\quad D\,(-4\,;\,2\,;\,-4),\quad E\,(-3\,;\,1\,;\,2).$

2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (ABC).

Soit L ce projeté, on a alors : $6x_L - 4y_L - 7z_L + 4 = 0$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & -3+6t \\ y_L & = & 1-4t \\ z_L & = & 2-7t \end{array}\right.$$ donc

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2),\quad B\,(0\,;\,1\,;\,0),\quad C\,(3\,;\,2\,;\,2),\quad D\,(-4\,;\,2\,;\,-4),\quad E\,(-3\,;\,1\,;\,2).$

2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (ABC).

Soit L ce projeté, on a alors : $6x_L - 4y_L - 7z_L + 4 = 0$ et $\begin{cases} x_L = -3+6t \\ y_L = 1-4t \\ z_L = 2-7t \end{cases}$ donc

$6(-3+6t) - 4(1-4t) - 7(2-7t) + 4 = 0$ donc $101t - 32 = 0$

d'où $t = \dfrac{32}{101}$ puis $\begin{cases} x_L = -3+6\times\dfrac{32}{101} = -\dfrac{111}{101} \\ y_L = 1-4\times\dfrac{32}{101} = -\dfrac{27}{101} \\ z_L = 2-7\times\dfrac{32}{101} = -\dfrac{22}{101} \end{cases}$

$A\,(1\,;\,-1\,;\,2),\quad B\,(0\,;\,1\,;\,0),\quad C\,(3\,;\,2\,;\,2),\quad D\,(-4\,;\,2\,;\,-4),\quad E\,(-3\,;\,1\,;\,2).$

b) En déduire la distance entre le point E et le plan (ABC).

C'est la distance entre E et son projeté orthogonal sur le plan (ABC) donc c'est la distance entre E et L.

$$EL = \frac{32}{\sqrt{101}}.$$