

Plans et droites dans l'espace (2)

Y. Moncheaux



Avril 2021

Table des matières

- 1 Plans
- 2 Droites de l'espace
 - Représentations paramétriques d'une droite

Soient une droite (Δ) de l'espace, A un point de (Δ) et \vec{u} un vecteur directeur de (Δ) .

Soient une droite (Δ) de l'espace, A un point de (Δ) et \vec{u} un vecteur directeur de (Δ) .

Propriété

$M(x; y; z)$ appartient à (Δ) si et seulement s'il existe un nombre t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t.X_{\vec{u}} \\ y = y_A + t.Y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t.Z_{\vec{u}} \end{cases}$$

Soient une droite (Δ) de l'espace, A un point de (Δ) et \vec{u} un vecteur directeur de (Δ) .

Propriété

$M(x; y; z)$ appartient à (Δ) si et seulement s'il existe un nombre t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t.X_{\vec{u}} \\ y = y_A + t.Y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t.Z_{\vec{u}} \end{cases}$$

Ces équations forment une **représentation paramétrique** de la droite (Δ) .

Soient une droite (Δ) de l'espace, A un point de (Δ) et \vec{u} un vecteur directeur de (Δ) .

Propriété

$M(x; y; z)$ appartient à (Δ) si et seulement s'il existe un nombre t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t.X_{\vec{u}} \\ y = y_A + t.Y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t.Z_{\vec{u}} \end{cases}$$

Ces équations forment une **représentation paramétrique** de la droite (Δ) .

Remarque : comme on peut parfois prendre différents points sur la droite et différents vecteurs directeurs, il y a une infinité de représentations paramétriques pour une droite donnée.

Exemple 1

Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $P(-1; 3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 1

Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $P(-1; 3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Réponse :

(d) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_P + t X_{\vec{v}} = -1 + 6t \\ y = y_P + t Y_{\vec{v}} = 3 \\ z = z_P + t Z_{\vec{v}} = 2t \end{cases}$$

Exercice en ligne

Exemple 2

Trouver un vecteur directeur et deux points de la droite (Δ)

de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 3t \end{cases} .$$

Exemple 2

Trouver un vecteur directeur et deux points de la droite (Δ)

de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 3t \end{cases} .$$

Réponses :

Les coefficients de t donnent les coordonnées d'un vecteur directeur donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) .

Exemple 2

Trouver un vecteur directeur et deux points de la droite (Δ)

de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 3t \end{cases} .$$

Réponses :

Les coefficients de t donnent les coordonnées d'un vecteur directeur donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

À chaque t correspond un point. Par exemple, pour $t = 0$:

$$\begin{cases} x = 5 + 0 = 5 \\ y = 2 - 0 = 2 \\ z = 4 - 3 \times 0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour } t = 1 : \begin{cases} x = 5 + 1 = 6 \\ y = 2 - t = 2 - 1 = 1 \\ z = 4 - 3t = 4 - 3 \times 1 = 1 \end{cases}$$

donc $A(5; 2; 4)$ et $B(6; 1; 1)$ sont deux des points de (d).

Exemple 3

Le point $K (3 ; 1 ; 2)$ appartient-il à la droite (Δ) ?

Exemple 3

Le point $K(3; 1; 2)$ appartient-il à la droite (Δ) ?

Réponse : il faut que les coordonnées de K soient compatibles avec la représentation paramétrique de la droite (Δ) donc qu'il

existe une valeur de t telle que
$$\begin{cases} x = 5 + t = 3 \\ y = 2 - t = 1 \\ z = 4 - 3t = 2 \end{cases} .$$

La première égalité donne $t = 3 - 5 = -2$, je remplace dans la deuxième : $2 - (-2) = 4 \neq 1$ donc il n'y a aucune valeur de t correspondant à K : le point K n'appartient pas à la droite (Δ) (inutile de vérifier avec la troisième égalité dans la mesure où les deux premières font apparaître un problème).

Exemple 4

Soient $E(-2; 0; 3)$ et $F(1; -1; 3)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (EF) .

Exemple 4

Soient $E(-2; 0; 3)$ et $F(1; -1; 3)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (EF) .

Réponse : $\vec{u} = \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de la

droite (EF) , voici deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 3 \end{cases} .$$

Exercices IV et V