

Exercices : plans, droites et sphères dans l'espace

Dans tous les exercices, nous considérons les points

$A(1; -1; 2)$ $B(0; 1; 0)$ $C(3; 2; 2)$ $D(-4; 2; -4)$ $E(-3; 1; 2)$
dans un repère orthonormal de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans suivants :

a) P d'équation $2x + y - 3z + 1 = 0$

b) Q d'équation $x + 2z + 4 = 0$

c) R d'équation $z = 3x - y$

2°) Soit P' le plan d'équation $4x - 3y + z - 4 = 0$.

P et P' sont-ils sécants? Quelle est la nature de leur intersection?

Exercice II (plan défini par une orthogonalité)

1°) Trouvez une équation des plans connaissant un point K et un vecteur normal \vec{n} :

a) Pour le plan $P_1 : K(4; 2; 1)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) Pour le plan $P_2 : K(1; 2; -3)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

c) Pour le plan $P_3 : K(0; -2; 3)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2°) Donnez une équation du plan perpendiculaire à (AC) et passant par B .

Exercice III (plan passant par trois points)

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Donnez une équation du plan (ABC) .

c) Vérifiez que D appartient au plan (ABC) .

2°) Cherchez une équation du plan (BDE) .

3°) Entraînement : cherchez l'équation de deux autres plans quelconques et vérifiez chez vous avec Geogebra...

Exercice IV (droite passant par deux points)

1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite (AC) .

2°) Donnez une représentation paramétrique de la droite (BD) .

3°) Entraînement : cherchez une représentation paramétrique d'une autre droite quelconque et vérifiez chez vous avec Geogebra.

4°) Le point E appartient-il à la droite (AC) ?

Exercice V (droite définie par une orthogonalité)

1°) En utilisant l'équation trouvée dans l'exercice III, donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par C .

2°) Même question avec la droite perpendiculaire au plan (BDE) et passant par B .

3°) Entraînement : trouvez l'équation d'un plan quelconque avec Geogebra puis trouvez une représentation paramétrique d'une autre droite perpendiculaire à ce plan, passant par un point quelconque et vérifiez avec Geogebra.

Exercice VI (intersection droite/plan)

1°) Déterminez le point d'intersection entre la droite (d) de

$$\text{représentation paramétrique } \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et le plan (P) d'équation $2x + 5y - z - 7 = 0$.

2°) Déterminez le point d'intersection entre la droite (AC) et (BDE) .

Exercice VII (projection orthogonale d'un point sur une droite)

1°) a) En utilisant une représentation paramétrique de la droite (AC) trouvée à l'exercice IV, calculez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

b) Déduisez-en la distance entre B et (AC) .

2°) De même, cherchez la distance entre E et (BD) .

Exercice VIII (projection orthogonale d'un point sur un plan)

Pour rappel, une équation du plan (ABC) est $6x - 4y - 7z + 4 = 0$.

- 1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à (ABC) et passant par E .
- 2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (ABC) .
b) En déduire la distance entre le point E et le plan (ABC) .