

## Exercices : plans, droites et sphères dans l'espace

Dans tous les exercices, nous considérons les points

$A(1; -1; 2)$   $B(0; 1; 0)$   $C(3; 2; 2)$   $D(-4; 2; -4)$   $E(-3; 1; 2)$   
dans un repère orthonormal de l'espace  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### Exercice I (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal pour chacun des plans suivants :

a)  $P$  d'équation  $2x + y - 3z + 1 = 0$

b)  $Q$  d'équation  $x + 2z + 4 = 0$

c)  $R$  d'équation  $z = 3x - y$

2°) Soit  $P'$  le plan d'équation  $4x - 3y + z - 4 = 0$ .

$P$  et  $P'$  sont-ils sécants? Quelle est la nature de leur intersection?

### Exercice II (plan défini par une orthogonalité)

1°) Trouvez une équation des plans connaissant un point  $K$  et un vecteur normal  $\vec{n}$  :

a) Pour le plan  $P_1 : K(4; 2; 1)$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

b) Pour le plan  $P_2 : K(1; 2; -3)$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ;

c) Pour le plan  $P_3 : K(0; -2; 3)$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

2°) Donnez une équation du plan perpendiculaire à  $(AC)$  et passant par  $B$ .

### Exercice III (plan passant par trois points)

1°) a) Calculez les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

b) Donnez une équation du plan  $(ABC)$ .

c) Vérifiez que  $D$  appartient au plan  $(ABC)$ .

2°) Cherchez une équation du plan  $(BDE)$ .

3°) Entraînement : cherchez l'équation de deux autres plans quelconques et vérifiez chez vous avec Geogebra...

### Exercice IV (droite passant par deux points)

1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite  $(AC)$ .

2°) Donnez une représentation paramétrique de la droite  $(BD)$ .

3°) Entraînement : cherchez une représentation paramétrique d'une autre droite quelconque et vérifiez chez vous avec Geogebra.

4°) Le point  $E$  appartient-il à la droite  $(AC)$ ?

### Exercice V (droite définie par une orthogonalité)

1°) En utilisant l'équation trouvée dans l'exercice III, donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan  $(ABC)$  et passant par  $C$ .

2°) Même question avec la droite perpendiculaire au plan  $(BDE)$  et passant par  $B$ .

3°) Entraînement : trouvez l'équation d'un plan quelconque avec Geogebra puis trouvez une représentation paramétrique d'une autre droite perpendiculaire à ce plan, passant par un point quelconque et vérifiez avec Geogebra.

### Exercice VI (intersection droite/plan)

1°) Déterminez le point d'intersection entre la droite  $(d)$  de

$$\text{représentation paramétrique } \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et le plan  $(P)$  d'équation  $2x + 5y - z - 7 = 0$ .

2°) Déterminez le point d'intersection entre la droite  $(AC)$  et  $(BDE)$ .

### Exercice VII (projection orthogonale d'un point sur une droite)

1°) a) En utilisant une représentation paramétrique de la droite  $(AC)$  trouvée à l'exercice IV, calculez les coordonnées du projeté orthogonal de  $B$  sur la droite  $(AC)$ .

b) Déduisez-en la distance entre  $B$  et  $(AC)$ .

2°) De même, cherchez la distance entre  $E$  et  $(BD)$ .

**Exercice VIII (projection orthogonale d'un point sur un plan)**

Pour rappel, une équation du plan  $(ABC)$  est  $6x - 4y - 7z + 4 = 0$ .

- 1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à  $(ABC)$  et passant par  $E$ .
- 2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de  $E$  sur  $(ABC)$ .  
b) En déduire la distance entre le point  $E$  et le plan  $(ABC)$ .