Transformations usuelles de l'espace (2)

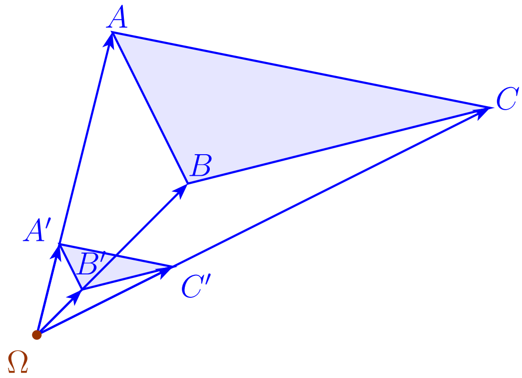
I. Homothéties

Définition

L'**homothétie** h de centre Ω et de rapport k (non nul) transforme tout point M en un point $M' = h(M)$ tel que $\boxed{\overrightarrow{\Omega M}' = k\,\overrightarrow{\Omega M}}$.

Dans la suite, on notera h une homothétie de rapport k.

Exemple 1 :
On a représenté ci-contre un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $k = \dfrac{1}{3}$.



Exemple 2 : Soit h l'homothétie de centre $\Omega\ (2\,;\,-1\,;\,4)$ et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.
Déterminez l'image de $A\ (0\,;\,3\,;\,-1)$ par h.

Réponse

Soit A' cette image. On a donc $\overrightarrow{\Omega A}' = k\,\overrightarrow{\Omega A} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega A}$ donc $\begin{cases} x_{A'} - x_\Omega = -\dfrac{1}{2}(x_A - x_\Omega) \\ y_{A'} - y_\Omega = -\dfrac{1}{2}(y_A - y_\Omega) \\ z_{A'} - z_\Omega = -\dfrac{1}{2}(z_A - z_\Omega) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{A'} = -\dfrac{1}{2}(0-2)+2 = 3 \\ y_{A'} = -\dfrac{1}{2}(3-(-1))+(-1) = -3 \\ z_{A'} = -\dfrac{1}{2}(-1-4)+4 = \dfrac{13}{2} \end{cases}$ donc $A'\left(3\,;\,-3\,;\,\dfrac{13}{2}\right)$.

Propriété 1

Si $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$ alors $\boxed{A'B' = |k| \times AB}$.

Remarques :

- une homothétie est un agrandissement si $|k| > 1$, une réduction si $|k| < 1$ et une isométrie si $|k| = 1$;
- une homothétie multiplie les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Propriété 2

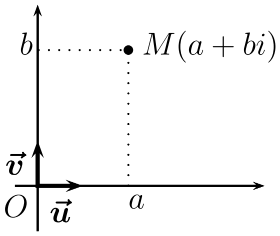
Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle (les vecteurs directeurs sont donc conservés).

II. Rotations axiales

1) Les trois formes d'un nombre complexe

a) Définition, représentation graphique, forme algébrique

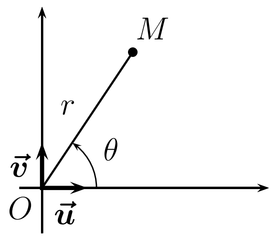
- On admet l'existence d'un nombre i (notation dûe à Euler) tel que $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$.
- Un nombre tel que, par exemple, $z = -2 + 3\mathrm{i}$ est un **nombre complexe** écrit sous la **forme algébrique** : $\boxed{z = a + b\mathrm{i}}$ (avec a et b réels).
- À tout nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$ correspond un point M de coordonnées $(a\,;\,b)$.



On dit que z est l'**affixe** de M, qu'on notera z_M.

b) Forme trigonométrique

Le point M peut également être défini par une distance r et un angle θ et on démontre aisément que :



Propriété 3

$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\boxed{a = r\cos\theta}$ $\boxed{b = r\sin\theta}$

On en déduit la propriété suivante ;

Propriété 4
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la ***forme trigonométrique*** $\boxed{z = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$.

Remarque : cette écriture est aussi valable pour 0, en écrivant $0 = 0\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ (où θ est quelconque).

c) Forme exponentielle

Le nombre $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ est noté $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc tout nombre complexe peut s'écrire sous la **forme exponentielle** $\boxed{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

> Exemple 3 : Si $z = 3\mathrm{i}$ alors $r = 3$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ donc $z = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

> Exemple 4 : On a $4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

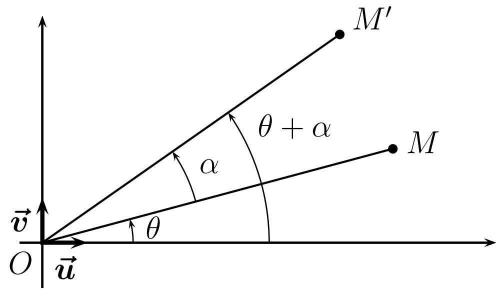
> Exemple 5 : Si $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ alors (...) $r = 2$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ donc $z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}-\frac{\pi}{3}}$.

Remarque : quelques cas à retenir : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

2) Rotations dans le plan

a) Rotations autour de O

Soit α un angle et M le point d'affixe $z_M = r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Soit M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α et $z_{M'}$ le complexe associé à M'.



Alors M' est défini par la distance r et par l'angle $\theta+\alpha$ donc $z_{M'} = r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)} = r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = z_M \boxed{\times\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}$.

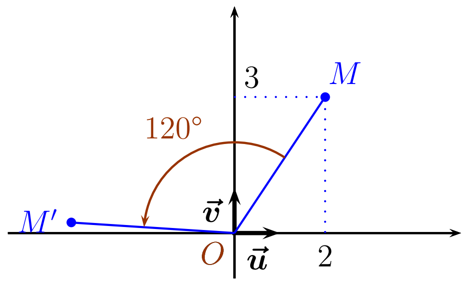
Propriété 5
Pour faire tourner un point M d'un angle α autour du point O, on multiplie z_M par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ (donc par $\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$).

EXEMPLE 6 :
Déterminez les coordonnées de A', image de $A\ (2\,;\,3)$ par la rotation de centre O et d'angle 120°.

Réponse

$$\begin{aligned} z_{A'} &= z_A \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = (2+3\,\mathrm{i}) \times (\cos 120° + \mathrm{i}\ \sin 120°) = (2+3\,\mathrm{i}) \times \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}^2 = \left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $A'\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\ \sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \simeq (-3,598\,;\ 0,232)$.



b) Rotations autour d'un point quelconque

Si on veut faire tourner d'un angle α un point A autour d'un point H, on considère qu'on fait tourner le vecteur $\overrightarrow{HA}$ pour obtenir le vecteur $\overrightarrow{HA'}$:

- ➡ on calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA}$, qui est égale à $z_A - z_H$;
- ➡ on la multiplie par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$, cela donnera l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$, qui est égale à $z_{A'} - z_H$;
- ➡ on en déduit $z_{A'}$.

Exemple 7 :
Déterminez les coordonnées de A', image de A $(2\,;\,3)$ par la rotation de centre H $(-4\,;\,1)$ et d'angle $-45°$.

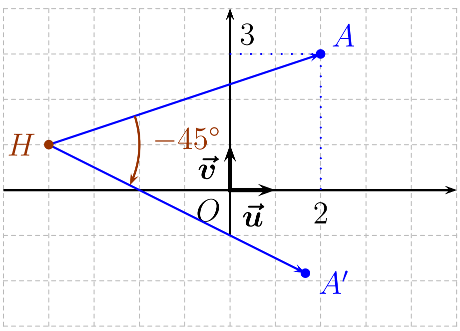
Réponse

- ➡ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA}$ est $z_A - z_H = (2+3\,\mathrm{i}) - (-4+1\,\mathrm{i}) = 6+2\,\mathrm{i}$ (vérifiez : le vecteur $\overrightarrow{HA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$) ;
- ➡ on multiplie par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-45°)} = \cos(-45°) + \mathrm{i}\sin(-45°)$ pour trouver l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$:

$$\begin{aligned} z_{A'} - z_H &= (z_A - z_H) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = (6+2\,\mathrm{i}) \times (\cos(-45°) + \mathrm{i}\sin(-45°)) = (6+2\,\mathrm{i}) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{i} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$

- ➡ $z_{A'} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i} + z_H = \left(4\sqrt{2}-4\right) + \mathrm{i}\left(-2\sqrt{2}+1\right)$.

  Conclusion : A' $\left(4\sqrt{2}-4\,;\,-2\sqrt{2}+1\right) \simeq (1,657\,;\,-1,828)$.

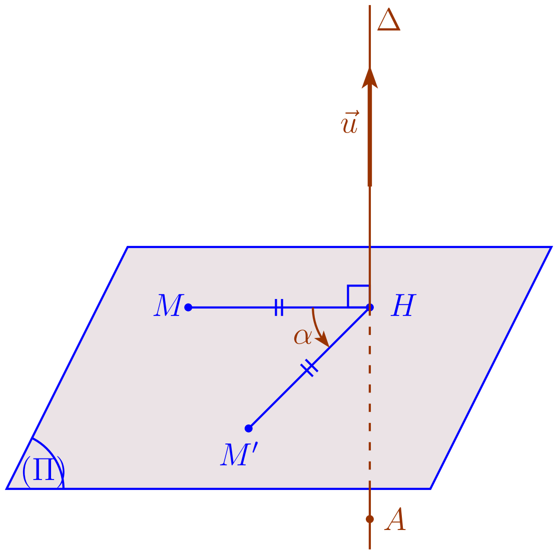


3) Rotations dans l'espace

On se restreint ici au cadre des rotations autour d'axes paralléles aux axes de coordonnées.

Soient Δ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et orienté suivant ce vecteur, ce qui induit un sens de rotation positif dans l'espace (règle du tournevis).

Soit r la rotation d'axe orienté Δ et d'angle α. Soit A un point de Δ, M un point de l'espace et $M' = r(M)$.



$\boxed{1}$ On obtient les coordonnées de H, projeté orthogonal de M sur Δ ainsi :

Vecteur $\vec{u}$ colinéaire à	Coordonnées de H
$\vec{\imath}$	$(x_M\,;\,y_A\,;\,z_A)$
$\vec{\jmath}$	$(x_A\,;\,y_M\,;\,z_A)$
$\vec{k}$	$(x_A\,;\,y_A\,;\,z_M)$

$\boxed{2}$ On se place ensuite dans le plan (Π) orthogonal à Δ et passant par M. Le point M' est alors l'image de M par la rotation de centre H et d'angle α.

Exemple 8 : Soit la rotation r d'angle $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ autour de la droite Δ passant par $A\ (-1\,;\ 3\,;\ 2)$, orientée par $\vec{u} = \vec{\jmath}$.
Donnez les coordonnées de l'image du point $P\ (2\,;\ -4\,;\ 1)$ par r.

Réponses :

$\boxed{1}$ Les coordonnées de H sont $(-1\,;\ y_P\,;\ 2) = (-1\,;\ -4\,;\ 2)$.
Nota : on peut retrouver les coordonnées de H en écrivant une représentation paramétrique de (Δ) puis en développant $\overrightarrow{PH}.\vec{\jmath} = 0$.

$\boxed{2}$ On se place dans le plan (Π) d'équation $y = y_P = -4$ et on note Z_P l'affixe du point P dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{k})$ (donc $Z_P = x + \mathrm{i}\,z = 2 + \mathrm{i}$) où $\Omega\ (0\,;\ -4\,;\ 0)$.

On a alors $Z_{P'} - Z_H = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(Z_P - Z_H)$ d'où $Z_{P'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(Z_P - Z_H) + Z_H$ donc

$$\begin{aligned}
Z_{P'} &= \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[(2+\mathrm{i}) - (-1+2\,\mathrm{i})] + (-1+2\,\mathrm{i}) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3-\mathrm{i}) - 1 + 2\,\mathrm{i} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}^2 - 1 + 2\,\mathrm{i} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Les coordonnées de P' sont donc : $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,;\ -4\,;\ \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\right) \simeq (1{,}366\,;\ -4\,;\ 4{,}098)$.