Transformations usuelles de l'espace (1)

I. Droites, plans et sphères (rappels)

1) Sphères

Une sphère de centre $\Omega\,(x_\Omega\,;\,y_\Omega\,;\,z_\Omega)$ et de rayon r a pour équation :

$$\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2}.$$

2) Droites

Représentations paramétriques d'une droite (Δ) de l'espace :

$$\begin{cases} x = x_A + t.X_{\vec{u}} \\ y = y_A + t.Y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t.Z_{\vec{u}} \end{cases}$$

où A un point de (Δ) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ).

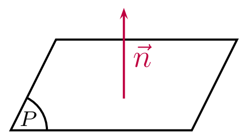
3) Plans

Tout plan a une équation de la forme

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

où a, b, c, d sont des constantes.

Si un plan (P) a pour équation $ax+by+cz+d=0$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour (P).



II. Généralités sur les transformations

On note E l'espace (à trois dimensions).

Définition

Une **transformation** est une application bijective de E dans E (tout point de E a une image unique et a un antécédent unique).

Notation : une transformation f admet une transformation réciproque notée f^{-1}, c'est-à-dire une transformation vérifiant : $M' = f(M) \Longleftrightarrow M = f^{-1}(M')$.

> Exemple 1 : Si f est la translation de vecteur $\vec{u}$ alors f^{-1} est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Définition

Une **isométrie** est une transformation de E dans E qui conserve les distances.

Propriété 1

- *une isométrie conserve aussi les angles géométriques, les aires et les volumes ;*
- *pour toutes les transformations traitées dans ce chapitre :*
  - *l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ où A' et B' sont les images respectives de A et de B ;*
  - *l'image d'une droite (AB) est la droite $(A'B')$ où A' et B' sont les images respectives de A et de B ;*
  - *l'image d'un cercle de centre K est un cercle de centre K' où K' est l'image de K ;*
  - *il y a conservation du parallélisme et de l'orthogonalité.*

III. Translations

Définition

La **translation** de vecteur $\vec{u}$ transforme tout point M en le point M' tel que $\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$.

Exemple 2 : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix}$. Déterminez l'image de $A\ (0\,;\,3\,;\,-1)$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Réponse

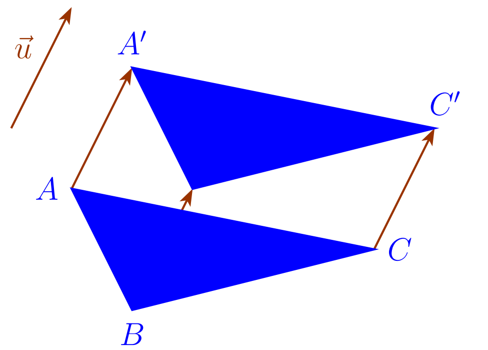
Soit A' cette image. On a donc $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ donc $\begin{cases} x_{A'} - x_A = x_{\vec{u}} \\ y_{A'} - y_A = y_{\vec{u}} \\ z_{A'} - z_A = z_{\vec{u}} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_{A'} = -2 + 0 = -2 \\ y_{A'} = 1 + 3 = 4 \\ z_{A'} = -5 + (-1) = -6 \end{cases}$

donc $A'\ (-2\,;\,4\,;\,-6)$.

Propriété 2

Une translation est une isométrie.

Exemple 3 : Sur la figure ci-contre, les triangles ABC et $A'B'C'$ ont les mêmes dimensions et donc la même aire.



Propriété 3

Par une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

Exemple 4 :

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 \end{cases}$.

Déterminez une représentation paramétrique de l'image de (d) par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Réponse : l'image de (d) est une droite (d') qui lui est parallèle ; elles ont donc les mêmes vecteurs directeurs.

Comme (d) passe par $A\ (0\,;\,3\,;\,-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$, la droite (d') passe par $A'\ (-2\,;\,4\,;\,-6)$ et a aussi pour vecteur directeur $\vec{v}$ donc une représentation paramétrique de (d') est :

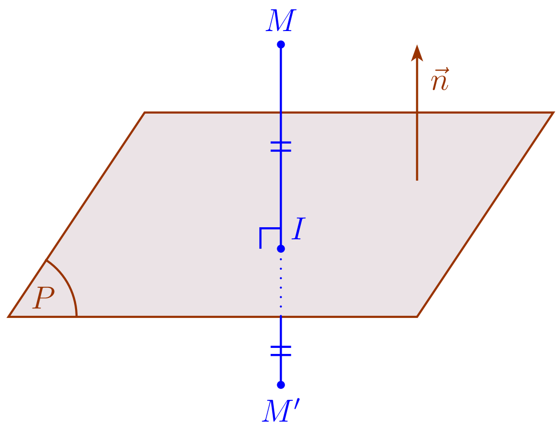
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = -6 \end{cases}.$$

IV. Réflexions

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

Définition
La **réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport au plan** (P) transforme tout point M en un point M' tel que :
➡ le milieu I du segment $[MM']$ est sur le plan (P) ;
➡ $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{n}$ (car $\overrightarrow{MM'} \perp (P)$).

Pour trouver l'image d'un point M :
$\boxed{1}$ on cherche une représentation paramétrique de (MM') ;
$\boxed{2}$ on en déduit les coordonnées de I ;
$\boxed{3}$ on en déduit les coordonnées de M'.



Exemple 5 :
Soit le plan (P) d'équation $y = 2x$.
Déterminez les coordonnées de l'image du point A de coordonnées $(-1\,;2\,;3)$ par la réflexion de plan (P).

Réponse :

$\boxed{1}$ L'équation de (P) s'écrit aussi $2x - y = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

$\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur pour la droite (AA') donc une représentation paramétrique de (AA') est :

$$\begin{cases} x = x_A + t \times X_{\vec{n}} = -1 + 2t \\ y = y_A + t \times Y_{\vec{n}} = 2 - t \\ z = z_A + t \times Z_{\vec{n}} = 3 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Soit I le milieu du segment $[AA']$. Alors $I = (AA') \cap (P)$ donc $\begin{cases} x_I = -1 + 2t \\ y_I = 2 - t \\ z_I = 3 \\ y_I = 2x_I \end{cases}$

ce qui donne $2 - t = 2(-1 + 2t)$ d'où $t = \dfrac{4}{5}$ puis $I\left(\dfrac{3}{5}\,;\dfrac{6}{5}\,;3\right)$.

$\boxed{3}$ Enfin, on a $\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{AI}$ donc $\begin{cases} x_{A'} - x_I = x_I - x_A \\ y_{A'} - y_I = y_I - y_A \\ z_{A'} - z_I = z_I - z_A \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A \\ y_{A'} = 2y_I - y_A \\ z_{A'} = 2z_I - z_A \end{cases}$.

Conclusion : $A'\left(\dfrac{11}{5}\,;\dfrac{2}{5}\,;3\right)$.

Remarque :

Méthode pour trouver l'équation de l'image d'un plan (Q) par une réflexion de plan (P) :

- trouver un vecteur normal $\vec{n}$ de (Q) ;
- trouver un point A de (Q) ;
- trouver le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$;
- calculer les images A' et B' de A et B par la réflexion ;
- en déduire un vecteur normal $\vec{n}'$ pour (Q') ;
- en utilisant les coordonnées de $\vec{n}'$ et de A', trouver une équation de (Q').