# Exercices : Loi de Poisson

## Exercice I

**1°)** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 5. Donnez les valeurs de :
$p(X = 6)$ $\qquad$ $p(X \leqslant 2)$
$p(3 < X \leqslant 6)$ $\qquad$ $p(X > 3)$.

**2°)** Soit $Y$ une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 6. Trouver la plus petite valeur de $k$ telle que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,9$.

## Exercice II (d'après BTS Géomètres 1996)

On saisit un texte et on l'imprime par pages de 50 lignes de 80 caractères, c'est-à-dire avec 4000 caractères par page.
La probabilité pour chaque caractère d'être mal saisi, ce qui entraine une faute de frappe, est de 1/1000. On admet que les fautes de frappe sont indépendantes les unes des autres.
On appelle $X$ la variable aléatoire définie par le nombre de fautes de frappe par page.

### Partie A

**1°) a)** Exprimer la valeur exacte de $P(X = 0)$.
**b)** En donner une valeur approchée en indiquant la façon dont la calculatrice a été employée.

**2°)** Indiquer la loi de probabilité classique suivie par $X$, ses paramètres, puis l'espérance mathématique et l'écart-type de $X$.

**3°)** On admet que l'on peut approcher la loi de $X$ par une loi de Poisson. Préciser le paramètre $\lambda$ de cette dernière.

### Partie B

Dans cette partie, on admet que $X$, donnant le nombre de fautes de frappe par page, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

**1°)** Calculer $P(X = 0)$ et comparer ce résultat à celui du 1°) de la partie A.

**2°)** Si on tolère jusqu'à trois fautes de frappe par page, quel est le pourcentage de pages à rejeter ?

**3°)** Combien de fautes par page faut-il tolérer pour rejeter moins de 1 % des pages ?

## Exercice III (grp C, 1997)

*Chacune des probabilités demandées sera calculée à $10^{-3}$ près.*
Une machine fabrique des pièces en grande série.

**1°)** On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque pièce tirée au hasard dans la production, associe sa longueur mesurée en centimètres. On admet que $X$ suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 5.
**a)** Calculer la probabilité que la longueur d'une pièce prise au hasard soit supérieure à 294.
**b)** Déterminer, au dixième près, le réel positif $a$ tel que
$P(300 - a < X < 300 + a) = 0,95$.

**2°)** Dans un lot très important, on admet que 0,6 % des pièces sont défectueuses. On extrait au hasard de ce lot des échantillons de 50 pièces ; on assimile cet échantillonnage à une suite de tirages avec remise. On désigne par $Y$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces défectueuses dans de tels échantillons.
**a)** Expliquer pourquoi $Y$ suit une loi binomiale ; en préciser les paramètres.
**b)** Calculer la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse.
**c)** On admet que l'on peut approcher la loi de $Y$ par une loi de Poisson. Quel en est le paramètre ? En utilisant cette approximation, calculer une valeur approchée de la probabilité de l'événement " $Y = 0$ ", puis de celle de l'événement " $Y < 2$ ".

## Exercice IV

### Partie A

Un sachet de café est conditionné à l'entreprise MDD par une ensacheuse.
On teste l'efficacité de l'ensacheuse sur un échantillon de 300 sachets en mesurant leur masse. On obtient les résultats suivants :

| Masse (g) | [242 ; 246[ | [246 ; 250[ | [250 ; 254[ | [254 ; 258[ | [258 ; 262[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 8 | 268 | 21 | 1 |

La machine a besoin d'un réglage si l'une des conditions n'est pas vérifiée :
— la masse moyenne des sachets de l'échantillon est comprise entre 252 g et 254 g.
— l'écart type de la série de l'échantillon est inférieur à 1,5 g.
— la proportion de sachets ayant une masse inférieure à 250 g est inférieure à 4 %.

Cette machine doit-elle être réglée ? Justifier la réponse.

**Partie B**

L'entreprise Café grand Père commercialise les sachets de café. On admettra que la variable aléatoire $X$ qui représente la masse d'un sachet suit la loi normale de moyenne $\mu = 253$ et d'écart type $\sigma = 1,5$.

**1°)** Calculer $p(X \leq 250)$. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**2°)** Un sachet est vendu pour un poids de 250 g. Quelle est la probabilité que la masse d'un sachet soit d'au moins 250 g ? Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**3°)** La société voudrait que le taux de sachet dont la masse est inférieure à 250 g soit inférieur à 1 %, sans changer la valeur de l'écart type. Quelle devrait être la valeur de la moyenne $\mu$ ? (à 0,1 g près)

**Partie C**

Les sachets sont conditionnés par lots de 100. On note $E$ l'évènement : $E$ : « un sachet a une masse inférieure à 250 g ». On supposera que $p(E) = 0,02$ et que les sachets sont répartis de façon indépendante dans chaque lot.

Soit $Y$ la variable aléatoire qui compte le nombre de sachets vérifiant l'évènement $E$.

**1°)** Justifier que $Y$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

**2°)** En moyenne, combien y-a-t-il de sachets dont la masse est inférieure à 250 g dans un lot ?

**3°)** Calculer la probabilité que tous les sachets aient une masse supérieure à 250 g. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**4°)** Calculer $p(Y \geq 2)$. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**Partie D**

Un distributeur de café est installé dans l'entreprise MDD et on note qu'en moyenne il y a 5 personnes utilisant le distributeur entre 10 h et 10 h 30 un jour de semaine.

Soit $Z$ la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes utilisant le distributeur de café entre 10 h et 10 h 30 un jour de semaine. On admet que $Z$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**1°)** Quelle est la valeur de $\lambda$ ?

**2°)** Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 5 personnes au distributeur de café entre 10 h et 10 h 30 un jour de semaine. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**Partie B**

L'entreprise Café grand Père commercialise les sachets de café. On admettra que la variable aléatoire $X$ qui représente la masse d'un sachet suit la loi normale de moyenne $\mu = 253$ et d'écart type $\sigma = 1,5$.

**1°)** Calculer $p(X \leq 250)$. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**2°)** Un sachet est vendu pour un poids de 250 g. Quelle est la probabilité que la masse d'un sachet soit d'au moins 250 g ? Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**3°)** La société voudrait que le taux de sachet dont la masse est inférieure à 250 g soit inférieur à 1 %, sans changer la valeur de l'écart type. Quelle devrait être la valeur de la moyenne $\mu$ ? (à 0,1 g près)

**Partie C**

Les sachets sont conditionnés par lots de 100. On note $E$ l'évènement : $E$ : « un sachet a une masse inférieure à 250 g ». On supposera que $p(E) = 0,02$ et que les sachets sont répartis de façon indépendante dans chaque lot.

Soit $Y$ la variable aléatoire qui compte le nombre de sachets vérifiant l'évènement $E$.

**1°)** Justifier que $Y$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

**2°)** En moyenne, combien y-a-t-il de sachets dont la masse est inférieure à 250 g dans un lot ?

**3°)** Calculer la probabilité que tous les sachets aient une masse supérieure à 250 g. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**4°)** Calculer $p(Y \geq 2)$. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

**Partie D**

Un distributeur de café est installé dans l'entreprise MDD et on note qu'en moyenne il y a 5 personnes utilisant le distributeur entre 10 h et 10 h 30 un jour de semaine.

Soit $Z$ la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes utilisant le distributeur de café entre 10 h et 10 h 30 un jour de semaine. On admet que $Z$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**1°)** Quelle est la valeur de $\lambda$ ?

**2°)** Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 5 personnes au distributeur de café entre 10 h et 10 h 30 un jour de semaine. Donner la valeur numérique arrondie au millième.