Exercices : Loi normale

Exercice I
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 5 et d'écart type 0,1.

1°) Donnez :

a) $P(X < 5,3)$	b) $P(X \geqslant 5,2)$	c) $P(X > 5,1)$
d) $P(4,7 < X < 5,2)$	e) $P(4,5 \leqslant X < 5,5)$	f) $P(4,2 \leqslant X < 5,8)$

2°) Déterminer le nombre k tel que $P(X < k) = 0,9732$.

3°) Déterminer le nombre k' tel que $P(5 - k' < X < 5 + k') \approx 0,8$.

Exercice II
On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les résultats de la pesée d'un même objet donné suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ.
On suppose que $m = 72,40$ et $\sigma = 0,08$.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche) :
a) " $X \geqslant 72,45$ " ;
b) " $X \leqslant 72,25$ " ;
c) " $72,30 \leqslant X \leqslant 72,50$ ".

2°) Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle $[m - h\,;\, m + h]$ soit égale à 0,989.

Exercice III (Grp C – 1995)
Une machine produit des pièces en série. Ces pièces sont classées en premier choix ou en deuxième choix.
On sait que la machine produit 20 % de pièces de premier choix.

1°) On prélève un êchantillon de 10 pièces (tirages indépendants avec remise), et on appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces de premier choix se trouvant dans l'échantillon.
a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
b) Calculer $P(X = 3)$.

2°) On prélève un échantillon de 400 pièces (tirages indépendants avec remise), et on appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces de premier choix se trouvant dans l'échantillon. On admettra que l'on peut utiliser pour Y une approximation par une loi normale.
a) Préciser les paramètres de cette loi normale.
b) Calculer alors $P(Y < 100)$ puis $P(Y > 72)$.

Exercice IV (Grp C – sujet 1992)
Sur des pièces fabriquées en série, on étudie l'épaisseur X et la largeur Y. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales d'écart-type 0,2 mm. L'espérance mathématique de X est 20 mm, celle de Y est 80 mm. L'épaisseur d'une pièce est correcte si elle est comprise entre 19,5 et 20,5 mm. De même la largeur est correcte si elle est comprise entre 79,5 mm et 80,5 mm.

1°) On prélève au hasard une pièce dans la production. Calculer la probabilité que la largeur de cette pièce soit correcte .

2°) Une pièce est bonne si la largeur et l'épaisseur sont correctes. Calculer la probabilité qu'une pièce soit bonne.

3°) On supposera dans cette question que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0,025.
On prend au hasard dans la production un échantillon de 120 pièces, et on appelle T le nombre aléatoire de pièces défectueuses dans cette échantillon.
a) Quelle est la loi de T ?
b) Trouver une valeur approchée de la probabilité d'avoir $T < 6$.

Exercice V (d'après AEA – 2011)

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats seront donnés à $0,001$ *près*

Une entreprise dispose d'une machine pour produire des tiges métalliques.
Une tige métallique est déclarée conforme si sa longueur est comprise entre $19,5$ et $20,5$ cm.

Partie A

Soit L la variable aléatoire qui, à chaque tige métallique produite, associe sa longueur. On suppose que L suit une loi normale de moyenne 20 et d'écart-type $0,3$. Calculer la probabilité qu'une tige métallique produite soit conforme.

Partie B

On suppose que la probabilité qu'une pièce produite soit non conforme est de $0,1$.
On prélève au hasard dans la production de tiges métalliques produites un échantillon de 50 tiges. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille 50 associe le nombre de tiges non conformes.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X, dont on précisera les paramètres ? (Justifier.)
2. Calculer la probabilité que l'échantillon comporte au plus une tige non confonne.
3. Donner la probabilité que l'échantillon comporte au moins trois tiges non conformes.

Partie C

Pour vérifier le dérèglement éventuel de la machine, une tige témoin est prélevée toutes les demi-heures. On obtient ainsi les résultats suivants : ($t = 0$ correspondant à 9 h.)

t_i : temps en *heure*	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
L_i : Longueur de la tige témoin en *cm*	20,01	20,04	20,07	20,15	20,18	20,22	20,25	20,31	20,35

1. Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(t_i\ ;\ L_i)$ dans un repère orthogonal du plan. (On utilisera l'annexe fournie , l'origine est $(0\,;\,20)$).
2. Un ajustement affine de ce nuage de points semble-t-il approprié ?
3. À l'aide de la calculatrice, donner une équation, sous la forme : $L = at + b$, de la droite d'ajustement affine de L en t par la méthode des moindres carrés (on arrondira a au millième et b au millième).

   Tracer cette droite.
4. La machine doit être systématiquement réglée dès que la tige témoin devient non conforme.

   En utilisant l'ajustement affine précédent, déterminer l'heure à laquelle il faudra régler la machine.

Annexe : exercice 2