Supplément : équations différentielles

Exercice I (d'après BTS 2009)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8\,\mathrm{e}^x$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1°) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2\,\mathrm{e}^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

Partie B : Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

1°) La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8\,\mathrm{e}^x$.
En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

b) Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x) = (4x^2 - 8x + 4)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction f.
Déduire de ce qui précède l'aire A, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice II (méthode de « variations de la constante »)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2°) Déterminer une fonction k telle que, pour tout x, la fonction h définie par $h(x) = k(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ soit une solution de (E).

3°) Déduire du 1°) et du 2°) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln 2$.

Exercice III (système d'équations différentielles)

1°) Dans l'étude d'un phénomène, on considère les variations de deux grandeurs x et y en fonction du temps t.
Ces grandeurs vérifient les relations :

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + 4y \qquad (1)$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0,6x - 1,8y \qquad (2)$$

avec les conditions initiales :

$$x(0) = 0 \qquad (3)$$

$$y(0) = 0,8 \qquad (4)$$

a) En utilisant (1), exprimer y en fonction de x et de x'.

b) En déduire l'expression de y' en fonction de x et de x''.

2°) En reportant dans l'expression (2) les expressions de y et y' trouvées au 1°), établir une équation différentielle vérifiée par x.

3°) a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $x'' + 2,8x' - 0,6x = 0$ où x est une fonction du temps t, où $t \geqslant 0$.

b) En utilisant les relations (1), (3) et (4), calculer $x'(0)$.
En déduire l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

c) En déduire l'expression de $x'(t)$ puis de $y(t)$.