Exercice 0 (source : Exos&méthodes Nathan 2014)

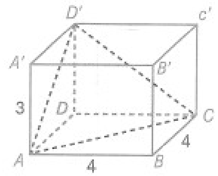
Comment calculer une longueur ou un angle dans une figure de l'espace ?

Pour calculer une longueur ou un angle dans une figure de l'espace :

1. on recherche, dans cette figure de l'espace, une figure plane où apparaît l'élément à calculer ;
2. on représente cette figure plane et on reporte sur la représentation les valeurs connues ;
3. on utilise alors les résultats connus en géométrie plane : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

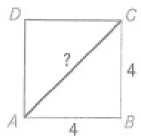
Exemple

Le parallélépipède rectangle $ABCDA'B'C'D'$ a pour dimensions, en cm :
$AB = 4$, $BC = 4$, $AA' = 3$.
Calculer AC, AD' et l'angle $\widehat{D'AC}$.



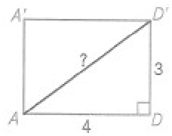
• Calcul de AC

1. AC est la diagonale du carré ABCD.
2. Schéma ci-contre.
3. $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$;
$AC = \sqrt{32}$, $AC = 4\sqrt{2}$ cm.



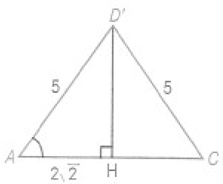
• Calcul de AD'

1. AD' est la diagonale du rectangle AA'D'D.
2. Schéma ci-contre.
3. $AD'^2 = AD^2 + DD'^2$; $AD'^2 = 4^2 + 3^2 = 25$;
$AD' = 5$ cm.



• Calcul de $\widehat{D'AC}$

1. On considère le triangle D'AC.
2. Les faces AA'D'D et DD'C'C du parallélogramme ont mêmes dimensions,
donc $D'A = D'C = 5$ cm.
Le triangle D'CA est isocèle.
Si H désigne le pied de la hauteur issue de D' :
$AH = \dfrac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$.

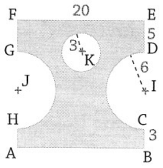


3. Dans le triangle AD'H, rectangle en H ;
$\cos \widehat{A} = \dfrac{AH}{AD'}$, soit $\cos \widehat{A} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.
*D'où **$\widehat{A} = 55{,}6°$** (valeur arrondie au dixième).*

Configurations géométriques du plan et de l'espace

Exercice 1 (source : Delagrave 2014)

Une baguette d'acier a pour longueur 1 m, et une section formée dans un carré de 20 mm de côté. Sa section est représentée ci-contre :



$AB = FE = 20\,\text{mm}$;
$BC = HA = 3\,\text{mm}$;
$DE = FG = 5\,\text{mm}$.

La section est évidée de deux demi-disques de centres I et J, de rayon 6 mm chacun, et d'un disque de centre K et de rayon 3 mm.

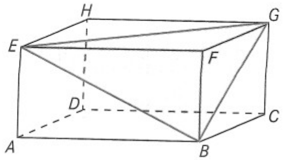
1. Calculer la valeur exacte de l'aire de la surface S de cette section en mm^2 puis en cm^2.

2. Déterminer le volume V d'acier nécessaire pour une baguette de ce type en cm^3.

3. Cette baguette est destinée à une maquette à l'échelle $\dfrac{1}{10}$ d'une structure architecturale et représente une poutre. Déterminer la surface de la section en cm^2 de la poutre et le volume de la poutre en cm^3.

Exercice 2 (source : Exos&méthodes Nathan 2014)

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de dimensions :
$AB = 6$ cm ; $AE = 3$ cm ; $BC = 3$ cm.



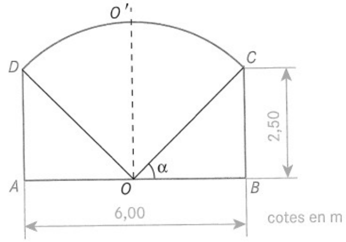
1. Quelle est la nature du triangle EBG ?

2. Calculer les dimensions du triangle EBG.
On donnera les valeurs exactes et les valeurs arrondies au mm.

3. On note H le milieu de $[BG]$.
a) Calculer EH.
b) En déduire l'aire, en cm^2, du triangle EBG.

Exercice 3 (source : Exos&méthodes Nathan 2014)

La figure ci-contre représente une porte de garage, constituée de deux vantaux. La droite (OO') est axe de symétrie de la figure ; l'arc $\overset{\frown}{DC}$ est un arc de cercle de centre O.



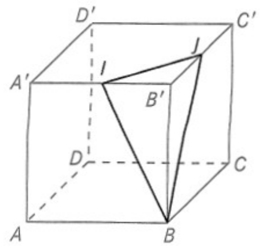
1. Calculer la valeur arrondie au mm de la mesure de OC.

2. Calculer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degré de l'angle α.

3. En utilisant les résultats précédents, calculer une valeur approchée de l'aire, en m^2, de la porte.

Exercice 4 (source : Exos&méthodes Nathan 2014)

On considère un cube d'arête 6 cm. I et J sont les milieux de $[B'A']$ et de $[B'C']$.



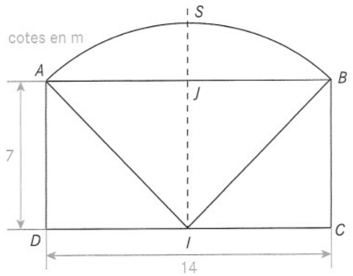
1. a) Quelle est la nature du triangle BIJ ?
b) Calculer les mesures des côtés du triangle BIJ.
On donnera les valeurs exactes.

2. a) Représenter le triangle BIJ.
b) On note H le pied de la hauteur issue de B.
Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{HBJ}$.
Arrondir à l'unité.
c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IBJ}$.

Configurations géométriques du plan et de l’espace

Exercice 5 (Exos&méthodes Nathan 2014)

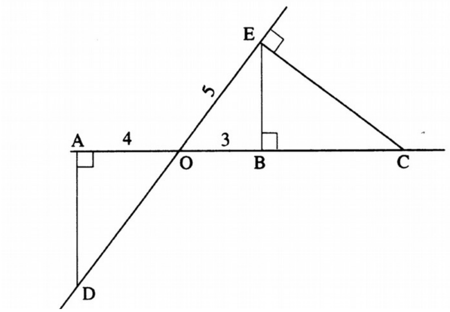
L'unité de longueur est le mètre, l'unité d'aire est le mètre carré.
Une scène de théâtre a la forme représentée ci-dessous. Elle est constituée d’un rectangle *ABCD* et d’une portion de disque *JASB*, disque de centre *I*, milieu de $[CD]$ et de rayon *IA*.



1. a) Montrer que les triangles *ADI* et *BCI* sont isocèles.
b) Montrer que l'angle $\widehat{AIB}$ est droit.
2. a) Calculer la valeur exacte de la longueur *IA* ; en déduire la valeur exacte de l'aire de la portion de disque *IASB*.
b) Calculer l'aire totale de la scène. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au dm^2.
3. Par quel nombre *k* faut-il multiplier toutes les dimensions de la scène pour obtenir une scène dont l’aire totale est de 200 m^2 ?
On donnera la valeur arrondie au dixième de *k*.

Exercice 6 (source : Foucher 2009)

Sur la figure ci-dessous, les points A, O, B, C sont alignés dans cet ordre ainsi que les points D, O et E ; les angles $\widehat{DAO}$, $\widehat{OBE}$ et $\widehat{OEC}$ sont des angles droits.



De plus, on connaît les longueurs en centimètres de AO, OB et OE :

AO = 4 cm, OB = 3 cm, OE = 5 cm.

(Attention : sur la figure, ces longueurs sont volontairement non respectées).

1° Réaliser, à partir des données précédentes, la figure exacte en expliquant brièvement la construction.

2° Déterminer par le calcul (les résultats étant donnés au centième près par défaut) :
a) la longueur en centimètre de OD,
b) la longueur en centimètre de BE,
c) la mesure en degrés de l’angle $\widehat{BOE}$,
d) la longueur en centimètres de BC.

Exercice 7 (source : Foucher 2009)

On considère une pyramide SABCD de sommet S et de base carrée telle que SAB et SAD sont des triangles rectangles en A.
On admet que dans ce cas, les triangles SBC et SDC sont rectangles, respectivement en B et D.
On donne : SA = 12 m et AB = 5 m.
Soit E le point de [SA] tel que SE = 3 m.
On coupe la pyramide SABCD par un plan parallèle à sa base ABCD et passant par E.
On admet que la section EFGH est un carré.
On appelle Σ le solide ABCDEFGH ainsi obtenu.

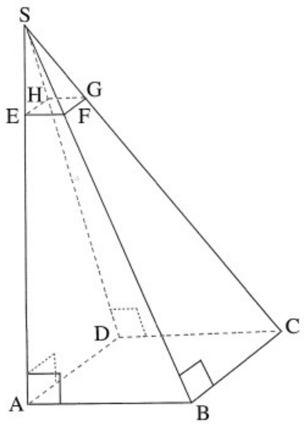


Fig. 46

1° Calculer les longueurs SB et SD.
2° Calculer les longueurs EF, SF et SH.
3° Calculer le volume des pyramides SABCD et SEFGH, puis en déduire le volume du solide Σ.

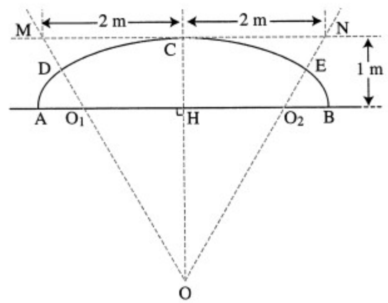
Volume d’une pyramide

$V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$, où $\mathcal{B}$ désigne l’aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

Exercice 8 (source : Foucher 2009)

La figure représente la coupe d’une voûte en « anse de panier ». Le triangle OMN est équilatéral.
L’arc DE appartient au cercle de centre O et de rayon OC.
L’arc DA appartient au cercle de centre O_1 et de rayon O_1D et l’arc EB appartient au cercle de centre O_2 et de rayon O_2E. Les cotes sont en mètres. Dans ce qui suit, on demande les valeurs approchées des distances arrondies à 10^{-2}.
1° Calculer la distance OC et la longueur de l’arc de cercle DE.
2° Calculer les distances OH, OO_1, O_1A.
Comparer les distances AB et MN.

3° Calculer la longueur du « cintre » ADEB.



Un peu d’architecture

« L’anse de panier » précédente a trois centres (O_1, O, O_2). Certaines voûtes utilisent des « anses de panier » à cinq, sept, neuf et onze centres.
Les voûtes en « anse de panier » ont été beaucoup utilisées dans la construction des ponts au XVII^e^ et au XVIII^e^ siècles.
Les voûtes romaines sont des arcs de cercles ; au XIV^e^ et au XV^e^ siècles, on utilisait des « ogives » à deux ou quatre centres. À partir du XIX^e^ siècle, on a souvent utilisé des ellipses (par exemple pour les voûtes du métro parisien) et des arcs de cercle.

Correction des exercices

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

2 **1. a)** On a $BI = BJ$ donc le triangle BIJ est un triangle isocèle.

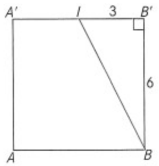
b) Calcul de BI

Dans le triangle $BB'I$ rectangle en B', on a :

$BI^2 = BB'^2 + B'I^2$ soit $BI^2 = 6^2 + 3^2 = 45$

d'où $BI = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

donc $\boldsymbol{BI = BJ = 3\sqrt{5}}$.

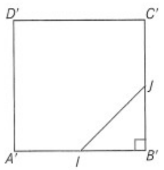


Calcul de IJ

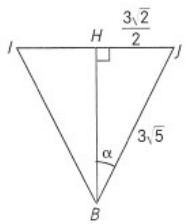
Dans le triangle $B'IJ$ rectangle en B', on a :

$IJ^2 = B'I^2 + B'J^2$ soit $IJ^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

d'où $IJ = \sqrt{18} = \boldsymbol{3\sqrt{2}}$.



2. a)



Dans le triangle BHJ rectangle en H, on a :

$$\sin\alpha = \frac{HJ}{BJ} \text{ soit } \sin\alpha = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}4}.$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\alpha \approx 18{,}4°$ (valeur arrondie à 0,1).

c) $\widehat{IBJ} = 2\alpha$ d'où $\boldsymbol{\widehat{IBJ} \approx 37°}$ (valeur arrondie à l'unité).

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 7

1° Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle SAB :

$SB^2 = SA^2 + AB^2$; $SB^2 = 12^2 + 5^2$; $SB^2 = 169$.

SB = 13 m.

De même, $SD^2 = SA^2 + AD^2 = SA^2 + AB^2$ (puisque AD = AB) donc SD = SB = 13 m.

2° Appliquons le théorème de Thalès dans le triangle SAB :

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB}.$$

• $\frac{SE}{SA} = \frac{EF}{AB}$; SE = 3, SA = 12, AB = 5,

d'où $\frac{3}{12} = \frac{EF}{5}$; $EF = \frac{15}{12}$; EF = 1,25 m.

• $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}$; $\frac{3}{12} = \frac{SF}{13}$, $SF = \frac{39}{12}$,

SF = 3,25 m.

• On procède dans le triangle SAD comme dans le triangle SAB. On obtient SH = 3,25 m.

3° • Désignons par V_1 le volume de la pyramide SABCD.

$V_1 = \frac{1}{3}\mathcal{B}_1 \times h_1$ où :

$\mathcal{B}_1$ est l'aire de la base ABCD, donc $\mathcal{B}_1 = 5^2 = 25$, et h_1 est la hauteur de la pyramide, $h_1 = SA = 12$.

Donc, $V_1 = \frac{1}{3} \times 25 \times 12$, $V_1 = 100$.

• Désignons par V_2 le volume de la pyramide SEFG.

En procédant comme pour V_1, on obtient :

$V_2 = \frac{1}{3}(1{,}25)^2 \times 3$, $V_2 = 1{,}5625$.

> ***Remarque***
>
> Les deux pyramides sont *homothétiques* :
>
> • le rapport des longueurs de côtés est : $\frac{SE}{SA} = \frac{1}{4}$.
>
> • le rapport des aires est donc : $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.
>
> • le rapport des volumes est donc : $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.
>
> $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{(4)^3}$, $V_2 = \frac{V_1}{64}$.

• Le volume de Σ est $V_3 = 100 - 1{,}5625$;

$V_3 = 98{,}4375\ m^3$.

Exercice 8