Suppléments : Calcul intégral

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2-6x}{(x-1)^2}$.

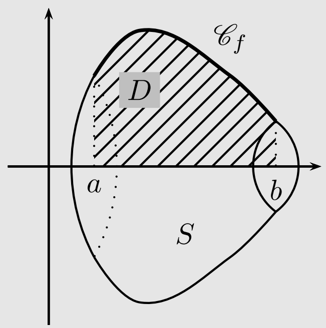
1°) Déterminer deux nombres a et b tels que, pour tout x de $]1\,;\,+\infty[$, $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2°) En déduire la primitive F de f telle que $F(2)=1$.

Calcul de certains volumes

Soit D le domaine défini par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Soit S le solide engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses. Le volume de S, en unités de volume, est alors $\boxed{V=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.



Exercice II (d'après le sujet AEA 2005)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par

$$f(x)=(3x-1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}.$$

1°) a) Étudier le signe de $f(x)$.

b) Calculer la dérivée de la fonction f, étudier son signe, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Tracer la courbe représentative (C) de f (unité graphique 1 cm).

2°) On considère le domaine D du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$. Soit le volume V du solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

a) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par $g(x)=[f(x)]^2$. Démontrer que la fonction G définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par

$$G(x)=-(9x^2+12x+13)\,\mathrm{e}^{-x}$$

est une primitive de la fonction g.

b) Calculer la valeur exacte du volume V en unités de volume, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près.

3°) Une entreprise réalise un objet en bois de la forme du solide étudié précédemment.
Cet objet est à l'échelle 3 par rapport au solide étudié au 2).
Quelle est la valeur maximale en dm arrondie à 10^{-2} près du diamètre de cet objet ?
Quel est le volume en dm^3 arrondi à 10^{-3} près de cet objet ?

4°) Le matériau utilisé a une masse volumique de 3,2 g/cm^3. Calculer le volume d'un objet en kg.

Exercice III (d'après BTS Géomètres 1996)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{8x-15}{1+x^2}$ et sa courbe représentative (Φ) dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
L'origine des axes sera placée de telle sorte que l'axe des abscisses puisse être gradué de -8 à $+8$ et l'axe des ordonnées de -20 à $+2$.

1°) a) Calculer $f'(x)$.
On justifiera que $f'(x)$ est du signe de $(4x+1)(4-x)$.

b) Étudier les variations de f. En précisant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on indiquera une asymptote de (Φ).

2°) a) Reproduire, compléter et utiliser sur le graphique le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-7	$-5,5$	-3	-2	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$
$f(x)$								

x	0	$0,5$	$0,75$	1	2	3	$5,5$	7
$f(x)$								

b) Tracer (Φ) dans les conditions indiquées plus haut.

3°) a) Déterminer les primitives de f.

b) Un calcul approché (avec la précision de la calculatrice) amène à considérer le nombre $\alpha=17,0025978$.
Calculer à 10^{-6} près $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x$.
Quelle interprétation géométrique peut-on en donner ?