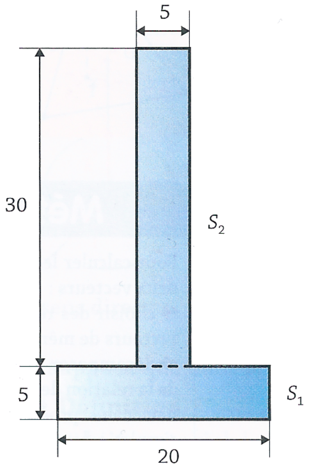
Exercices : Barycentres et centres d'inertie

Le centre d'inertie d'un corps correspond au barycentre des particules qui composent ce corps, chaque particule étant pondérée par sa masse. Si le corps est homogène, on identifie son centre d'inertie à son centre de gravité.

On admet pour l'instant que le centre d'inertie d'un triangle est son centre de gravité (intersection des médianes), que le centre d'inertie d'un rectangle est son centre…

→ Centre d'inertie d'une plaque homogène

Un profilé en T a sa section constituée de deux plaques rectangulaires S_1 et S_2. Il est représenté par la figure ci-dessous (mesures en millimètres).



On cherche à déterminer le centre d'inertie G de la section de ce profilé.

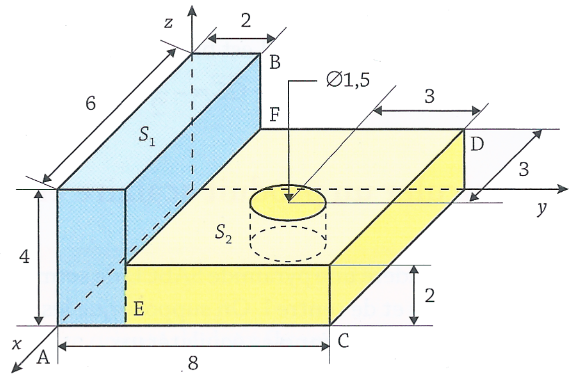
1. Reproduire la figure à l'échelle 4 (4 cm représentent 1 cm de l'objet) et placer les points G_1 et G_2, centres d'inertie respectifs des plaques S_1 et S_2.

2. Le centre d'inertie d'un assemblage S de plaques S_1 et S_2 de masses m_1 et m_2 est le barycentre des centres d'inertie de ces plaques, pondérés par leurs masses respectives. Ces plaques sont constituées d'un matériau homogène, leur masse est donc proportionnelle à leur aire.
Déterminer deux réels a et b tels que le centre d'inertie G de la section du profilé est barycentre des points (G_1, a) et (G_2, b).

3. Déterminer la position du centre d'inertie G de la section du profilé.

→ Centre d'inertie d'un solide homogène

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la pièce métallique ci-dessous, constituée de deux solides de même matériau.



S_1 est un parallélépipède rectangle.
S_2 est un parallélépipède rectangle, percé d'un cylindre de diamètre 1,5 de même centre que S_2.
On donne les points :
A(6 ; 0 ; 0),
B(0 ; 2 ; 4),
C(6 ; 8 ; 0),
D(0 ; 8 ; 2),
E(6 ; 2 ; 0),
F(0 ; 2 ; 2).

1. Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_1 du solide S_1 puis les coordonnées du centre d'inertie G_2 du solide S_2.

2. Le centre d'inertie d'un assemblage S de solides S_1 et S_2 de masses m_1 et m_2 est le barycentre des centres d'inertie de ces solides, pondérés par leurs masses respectives, proportionnelles à leur volume, car les solides S_1 et S_2 sont constitués d'un matériau homogène.
a. Déterminer le volume de S_1, puis le volume de S_2 (donner les valeurs exactes).
On rappelle que le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est $V = \pi R^2 h$.
b. Déterminer deux réels a et b tels que le centre d'inertie G de la pièce métallique est barycentre des points (G_1, a) et (G_2, b).
c. En déduire les coordonnées du centre d'inertie G de la pièce métallique.