Exercice I

1°) $f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c = 0$ donc $4a - 2b + c = 0$;
$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 1$ donc $a - b + c = 1$;
$f(2) = a(2)^2 + b(2) + c = -1$ donc $4a + 2b + c = -1$.

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$

En soustrayant la première et la dernière ligne, il vient $-4b = 1$ donc $\boxed{b = -\dfrac{1}{4}}$.

On remplace b par $-1/4$ dans les deux premières équations, ce qui donne $\begin{cases} 4a + c + 0,5 = 0 \\ a + c - 0,75 = 0 \end{cases}$ d'où, en soustrayant : $3a + 1,25 = 0$ donc $a = -1,25/3 = \boxed{-\dfrac{5}{12}}$.

On remplace a par $-5/12$ dans une équation, par exemple : $-\dfrac{5}{12} + c - 0,75 = 0$
donc $c = \dfrac{5}{12} + 0,75 = \dfrac{5}{12} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{14}{12} = \boxed{\dfrac{7}{6}}$.

Conclusion : $\boxed{f(x) = -\dfrac{5}{12}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{6}}$.

2°) $f(0) = -\dfrac{5}{12} \times 0^2 - \dfrac{1}{4} \times 0 + \dfrac{7}{6} = \boxed{\dfrac{7}{6}}$ soit un peu plus de 1, ce qui est cohérent avec le graphique.

3°) $f(x) = 0 \iff -\dfrac{5}{12}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{6} = 0 \iff -5x^2 - 3x + 14 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-5) \times 14 = 289 = 17^2$ donc il y a deux solutions
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - 17}{-10} = \boxed{1,4}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + 17}{-10} = \boxed{-2}$.

4°) $f(x) \geqslant 1 \iff -\dfrac{5}{12}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{6} \geqslant 1 \iff -5x^2 - 3x + 14 \geqslant 12 \iff -5x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$.
Soit $g(x) = -5x^2 - 3x + 2$, on veut que $g(x)$ soit positif.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 49 = 7^2$ donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - 7}{-10} = \boxed{0,4}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + 7}{-10} = \boxed{-1}$.
$g(x)$ a le signe de $-a = 5$ donc est positive entre x_1 et x_2 donc quand $x \in [-1\ ;\ 0,4]$.

5°) L'axe de symétrie a pour équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ donc ici $\boxed{x = -\dfrac{3}{10}}$.
Pour confirmer que cet axe est bien un axe de symétrie, on prouve que $f(-0,3 - h) = f(-0,3 + h)$.
Or : $f(-0,3 + h) = -\dfrac{5}{12}(-0,3 + h)^2 - \dfrac{1}{4}(-0,3 + h) + \dfrac{7}{6} = -\dfrac{5}{12}(0,09 - 0,6h + h^2) + \dfrac{0,3}{4} - \dfrac{1}{4}h + \dfrac{7}{6}$

$= -\dfrac{0,45}{12} + \dfrac{3}{12}h - \dfrac{5}{12}h^2 + \dfrac{0,3}{4} - \dfrac{1}{4}h + \dfrac{7}{6}$

$= -\dfrac{5}{12}h^2 + \dfrac{-0,45 + 0,9 + 14}{12} = \boxed{-\dfrac{5}{12}h^2 + \dfrac{289}{240}}$

En remplaçant h par $-h$, on trouve : $f(-0,3 - h) = -\dfrac{5}{12}(-h)^2 + \dfrac{289}{240} = -\dfrac{5}{12}h^2 + \dfrac{289}{240} = f(-0,3 + h)$ ce qui confirme la symétrie.
Remarque : cette démonstration n'est pas nécessaire dans le cas d'une fonction du second degré.

Exercice II

1°) Si on pose $x = AM$ alors l'aire du motif est $x^2 + \dfrac{x(8-x)}{2} = 0,5x^2 + 4x$. Les solutions de $0,5x^2 + 4x = 32$ sont $-4 \pm 4\sqrt{5}$ donc ici $AM = -4 + 4\sqrt{5}$.

2°) La fonction obtenue au 1°) est du second degré, avec $a = 0,5$ et $-\dfrac{b}{2a} = -4$ donc son tableau de variations est :

3°) a) L'aire du triangle est nulle quand $x = 0$ et $x = 8$ mais pas dans les autres cas : elle est donc variable.

b) L'aire du triangle est $\dfrac{x(8-x)}{2} = -0,5x^2 + 4x$. Cette fonction admet un maximum (car $a < 0$) atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = 4$ (cette aire maximale est alors 8).

4°) a) On résout $x^2 = -0,5x^2 + 4x$ ce qui donne $x = 0$ ou $x = 8/3$.

b) On résout $-0,5x^2 + 4x > x^2$ ce qui donne $x \in \ ]0\,;\,8/3[$ (signe de $-a$ entre les racines).

Exercice III

On pose $AP = x$. L'aire du terrain est alors $x^2 + \dfrac{10(10-x)}{2} = x^2 - 5x + 50$. Cette fonction a un minimum (car $a > 0$), atteint quand $x = -\dfrac{b}{2a} = 5/2$ et ce minimum est $\dfrac{175}{4}$.