Révisions : équations différentielles

Exercice I (Grp C 2005)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x$, où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1°) Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E').

2°) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie pour tout x réel par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3°) Résoudre l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition : $f(0) = 0$.

Réponse : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1$.

Exercice II (Grp B 2001)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}$,
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.

2°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la confition $f(0) = -1$.

Réponse : $f(t) = (t-1)\,\mathrm{e}^{2t}$.

Exercice III (Grp C 2000)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2$ est une solution de (E).

2°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3°) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions

$$f(0) = 2 \text{ et } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}}{2} + 2.$$

Réponse : $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + 2$.

Exercice IV (Grp C 2002)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = x + 4$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

2°) Vérifier que la fonction g, définie pour tout réel x par $g(x) = x + 2$ est une solution particulière de (E).
En déduire les solutions de (E).

3°) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie les deux conditions $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

Dans la suite : $f(x) = -x\mathrm{e}^{-x} + x + 2$.

Exercice V (Grp C 2004)

L'étude d'un système mécanique permet de considérer qu'une fonction z est solution de l'équation différentielle (E) : $5z'' + 6z' + z = 2$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$.

2°) Chercher une solution particulière constante de l'équation (E) et en déduire la solution générale de (E).

3°) Donner la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 5$ et $g'(0) = -1$.

Réponse : $f(t) = 0,5\,\mathrm{e}^{-t} + 2,5\,\mathrm{e}^{-0,2t} + 2$.

Exercice VI (Grp B 1999)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2}{2} - x - 1$,
où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

2°) Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3°) Déduire du 1°) et du 2°) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e} + \frac{3}{2}$.

Réponse : $f(x) = x\,\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} + x$.

Exercice VII (2000)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = -\frac{16}{3}\,\mathrm{e}^{-2x}$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 4y = 0$.

2°) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{3}\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions

$$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

Réponse : $f(x) = \frac{4}{3}(1+x)\mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice VIII (2002)

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : y'' - y' - 2y = (-6\,x - 4)\,\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' - y' - 2y = 0$.

2°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 1.$$

Réponse : $f(x) = (x^2 + 2x + 1).\,\mathrm{e}^{-x}$.