Produit scalaire de deux vecteurs

I. Rappels de formules (dans le plan)

Propriétés 1 (coordonnées et distances)

- *Dans une base orthonormée* ($\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1$), *si* $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *alors*

$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{X^2 + Y^2}}$.

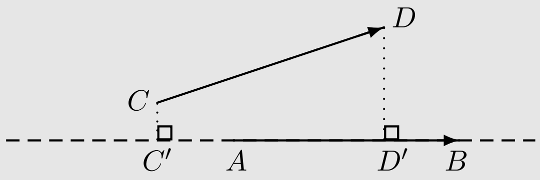
- $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$
- $\boxed{\text{Dans un repère orthonormé : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$.

Remarque : Tout ce qui a été écrit précedemment se généralise sans problème à l'espace, par exemple, la norme de $\vec{u}\ (X\,;\,Y\,;\,Z)$ est $||\vec{u}|| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

II. Définitions du produit scalaire

1) Définition 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. Soient C' et D' les projections orthogonales de C et D sur la droite (AB). Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est :



$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB.C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont le même sens} \\ -AB.C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont un sens contraire} \end{cases}}$$

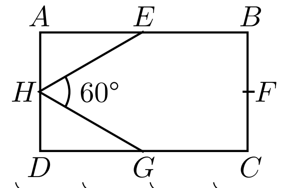
Exemple 1 : Soit $ABCD$ un carré de côté 3 et I le milieu de $[BC]$. Alors : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 9$ et $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BD} = -AB \times BA = -9$.

Remarques :

- Le produit scalaire n'est pas en général le produit des longueurs ($\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD} \neq AB \times AD$) ;
- on projette un vecteur sur la direction de l'autre mais pas les deux vecteurs sur une troisième direction ($\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AC} \neq AB^2$).

Exercice I (produit scalaire par projection)

Soit un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont $AD = 4$ et $DC = 4\sqrt{3}$. Les points E, F, G, H sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Calculez, par projection, $\overrightarrow{HG}\,.\,\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HE}\,.\,\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EB}\,.\,\overrightarrow{FD}$.

2) Définition 2 (avec les longueurs et les angles)

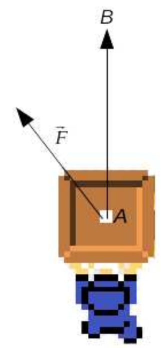
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

(où $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Exemple 1 : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 45° = 3 \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 9$.

Exercice II (au travail !)

Sokoban est un gardien d'entrepôt, qui doit réguliérement déplacer des caisses. Il doit aujourd'hui déplacer une caisse lourde de la position A vers la position B, distante de 4 mètres. Pour cela, il exerce une poussée, ou force, modélisée par le vecteur $\vec{F}$. Suivant l'intensité de la force et la façon dont elle est appliquée à la caisse, cette dernière avancera plus ou moins vite. Cette notion d'efficacité est appelée « travail » (c'est une énergie) par les physiciens. Le travail de la force $\vec{F}$ est égal à : $\boxed{W = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$.
il s'exprime en Joules quand F est en Newton et AB en mètres.



1°) a) Dans quels cas la caisse ne se déplacera pas (travail nul) ?
b) Dans quels cas la caisse avancera de A vers B (travail moteur) ?
c) Dans quels cas la caisse reculera (travail résistant) ?
d) Dans quel cas le travail sera-t-il maximal ?

2°) On note α l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$. Qu'est-ce-qui est le plus efficace :
a) $F = 10$ et $\alpha = 40°$? b) $F = 5$ et $\alpha = 45°$? c) $F = 9$ et $\alpha = 20°$?

Exercice III (encore du travail !)

Une personne de masse 80 kg monte debout sur une chaise de 50 centimètres de haut.

1°) a) Quel est le travail effectué par le poids de cette personne ? (on rappelle que $P = mg$ et que $g \simeq 9,81$ N/kg.)

b) Convertissez ce résultat en (kilo)calories, sachant que 1 kcal = 4184 J.

2°) Combien de montées faudrait-il pour perdre 1000 kcal (on néglige les descentes) ?

3) Définition 3 (avec les coordonnées)

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace alors $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'}$.

⋆ Le produit scalaire permet, en jouant avec ces trois formules, de déterminer des angles, des longueurs, ou de réaliser des projections.

EXEMPLE 2 :
Soient $A\ (1\,;\,-2)$, $B\ (-1\,;\,0)$ et $C\ (2\,;\,5)$. Donner une mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ (on suppose que l'on est dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$).

Réponse : l'angle $\widehat{BAC}$ est l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Or : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = 0 - (-2) = 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = 2 - 1 = 1 \\ y_C - y_A = 5 - (-2) = 7 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 2 \times 7 = 12$.

Comme $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, on calcule :
$AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{12}{2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5}$ d'où $\widehat{BAC} = \arccos\dfrac{3}{5} \simeq \boxed{53,13°}$.

Exercice IV

1°) Soient, dans une base orthonormée de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculez $\vec{u}.\vec{v}$.

b) Calculez les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Déduisez-en une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2°) Soient, dans un repère orthonormé du plan, les points $A\ (-1\,;\,2)$, $B\ (2\,;\,3)$, $C\ (5\,;\,-1)$ et $D\ (4\,;\,-6)$.

a) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En utilisant le produit scalaire, cherchez une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAD}$.

c) Déterminez une valeur approchée des autres angles du quadrilatère $ABCD$.

3°) Soit E tel que $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CE} = 10$ et $\widehat{BCE} = 30°$. Calculez la longueur CE.

III. Quelques propriétés du produit scalaire

Propriétés 2

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a : $\boxed{\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2}$ $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$

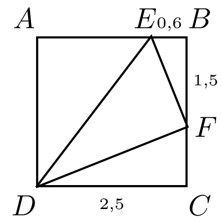
$\boxed{\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$ $\boxed{\vec{u}.(k.\vec{v}) = (k.\vec{u}).\vec{v} = k.\vec{u}.\vec{v}}$

$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{u}.\vec{v} = 0}$

Exercice V

$ABCD$ est un carré de côté 2,5. On a $EB = 0,6$ et $BF = 1,5$.

Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que DEF est un triangle rectangle.



Exercice VI

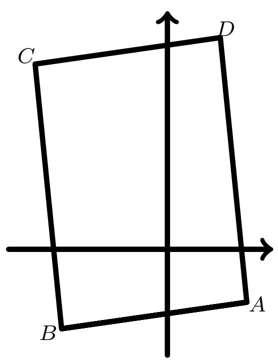
Soient, dans un repère orthonormé, les points $A\ (3\,;\,-2)$, $B\ (-4\,;\,-3)$, $C\ (-5\,;\,7)$ et $D\ (2\,;\,8)$.

1°) Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

2°) Le quadrilatère $ABCD$ est-il un rectangle ?

3°) Sinon, déterminez les angles de ce quadrilatère, arrondis à 0,1°.

4°) Déterminez la longueur exacte du projeté orthogonal du segment $[CD]$ sur le segment $[CB]$.



On peut utiliser le produit scalaire pour trouver des équations de droites (ou de plans) perpendiculaires à une autre droite.

EXEMPLE 3 :
Soient, dans un repère orthonormé, les points $A\ (2\,;\,0)$, $B\ (-1\,;\,3)$ et $C\ (5\,;\,-2)$. Déterminez une équation de la droite perpendiculaire à (AC) et passant par B (donc de la hauteur du triangle ABC issue de B).
Réponse :
Appelons (d) cette droite.
Soit $M\ (x\,;\,y)$ un point. Alors $M \in (d) \iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BM}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$.
Or les coordonnées des deux vecteurs sont :
$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BM}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3(x+1)-2(y-3) = 3x-2y+9$.
Une équation de (d) est donc $3x-2y+9=0$.

Exercice VII
Soient, dans un repère orthonormé, les points $A\ (4\,;\,1)$, $B\ (-2\,;\,3)$ et $C\ (2\,;\,-2)$.

1°) Déterminez une équation de chacune des hauteurs du triangle ABC.

2°) Déterminez une équation de la droite (AB).

3°) Déterminez les coordonnées du point K, pied de la hauteur issue de C.

4°) Déduisez-en l'aire du triangle ABC ainsi qu'une mesure des trois angles de ce triangle.

Exercice VIII (suite de l'exercice I)

1°) a) En remarquant que $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC}$, calculer $\overrightarrow{HB}\,.\,\overrightarrow{HC}$.
b) Calculer la valeur exacte de HC.
c) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BHC}$.

2°) a) Calculer $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}$.
b) Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et de C sur la droite (BD). Déterminer la valeur exacte de la longueur $A'C'$.

3°) Déterminer une valeur approchée de l'angle aigu entre (HB) et (AG).

Exercice IX (une propriété des parallélogrammes)

1°) Construire un parallélogramme $ABCD$.

2°) Mesurez les longueurs de ses côtés et de ses diagonales. Calculez la somme des carrés des côtés puis la somme des carrés des diagonales. Quelle conjecture peut-on faire ?

3°) Terminez le calcul suivant :
$AC^2 + BD^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = \ldots$

Exercice X (longueur d'une médiane)
Soit ABC un triangle de dimensions $AB = 5$, $BC = 8$ et $AC = 12$.
On cherche la longueur de la médiane du triangle ABC issue de A, c'est-à-dire la longueur AI où I est le milieu de $[BC]$.

1°) a) Terminez le calcul suivant :
$AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 = \ldots$
b) En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{1}{2}BC^2$ (cette relation est appelée théorème d'Apollonius).

2°) Conclure.