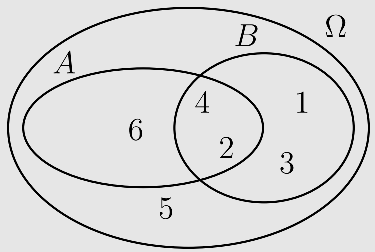
Exercices : Probabilités – Événements

I. Evénements – Vocabulaire

1) Événements

Exemple 1 : On lance une fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au chiffre X apparaissant sur la face du dessus.

Il y a ici six **éventualités** (six résultats possibles) et l'ensemble de toutes les éventualités est l'**univers** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Un **événement** est un ensemble d'éventualités, son **cardinal** est le nombre d'éventualités qui y sont contenues.
Par exemple soit l'événement A : « X est pair ». Alors A peut être représenté par l'ensemble $\{2, 4, 6\}$ et on a $\text{card}\, A = 3$.
De même, l'événement B : « X est inférieur à 5 » peut s'écrire $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et on a $\text{card}\, B = 4$.



Un événement peut être **impossible** : par exemple, « $X = 7$ » est impossible, on note cet événement $\emptyset$.
Un événement peut être **certain** : par exemple, « X est un entier » est certain et contient toutes les éventualités. Cet événement est l'univers Ω.

Exemple 2 : On lance le dé deux fois. Les éventualités peuvent alors être représentées sous forme de couples $(a; b)$ (a : 1er chiffre, b : second chiffre). Il y a alors $6 \times 6 = 36$ éventualités.

Exercice I (jeu de pile ou face)
On lance une pièce équilibrée (qui ne tombe jamais sur la tranche. . .).

1°) On lance deux fois une pièce.

a) Donner une éventualité de cette expérience.
b) Combien d'éventualités y a-t-il au total ?
c) Traduire les événements suivants sous forme d'ensemble :
A : « La pièce est tombée sur Face une seule fois »
B : « La pièce est tombée au moins une fois sur Pile »
C : « La pièce est tombée au plus une fois sur Face ».

2°) On lance trois fois une pièce.

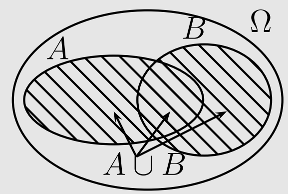
a) Donner une éventualité de cette expérience.
b) Combien d'éventualités y a-t-il au total ?
c) Traduire l'événement D : « La pièce n'est tombée qu'une seule fois sur Pile » sous forme d'ensemble.
d) Combien d'éventualités y a-t-il dans les événements :
E : « La pièce est tombée au moins une fois sur Face » ?
F : « La pièce est tombée une fois sur Face » ?

2) Opérations sur les événements

a) Réunion et intersection de deux événements

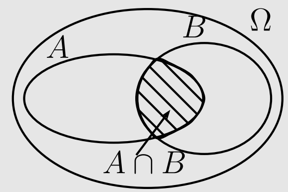
La **réunion** des événements A et B, notée $A \cup B$ (« A union B »), est l'ensemble des éventualités qui sont dans A **ou** dans B.

Exemple 1 :
$\{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.



L'**intersection** des événements A et B, notée $A \cap B$ ("A inter B") est l'ensemble des éventualités qui se trouvent dans A **et** dans B.

Exemple 1 :
$\{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$.

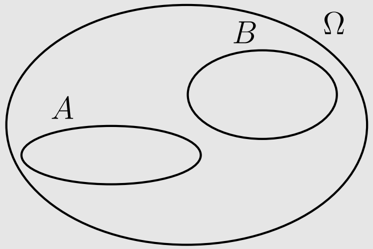


EXEMPLE 3 :
On choisit au hasard une personne.
Soient les événements A : « la personne est une femme » ; B : « la personne est adulte » et C : « la personne est du 3e âge ». $A \cup B$ est l'événement « la personne est une femme ou une personne adulte ».
$A \cap B$ est l'événement « la personne est une femme adulte ».
Remarquons que $B \cap C = C$ et que $B \cup C = B$.

b) Evénements incompatibles

Deux événements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$ donc s'il est impossible que A et B se réalisent en même temps.

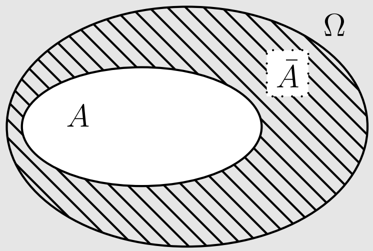
EXEMPLE 1 : $A =$ « le dé donne un 5 » et $B =$ « le dé donne un nombre pair » sont incompatibles.



c) Evénement contraire

Soit A un événement. L'**événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'événement constitué des éventualités qui ne sont pas dans A.

EXEMPLE 1 : le contraire de l'événement $A = \{2, 5\}$ est l'événement $\bar{A} = \{1, 3, 4, 6\}$.



Remarque : deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements incompatibles ne sont pas forcément contraires. Par exemple, $A = \{2\,;\,5\}$ et $B = \{1\,;\,3\}$ sont incompatibles mais non contraires.

Exercice II
Une usine dispose de deux machines M_1 et M_2 qui fabrique le même type de pièces circulaires. Ces pièces sont utilisables si leur diamètre est compris entre 8 cm et 9 cm. On prélève une pièce au hasard dans la production. On considère les événements :
E_1 : « la pièce provient de M_1 », E_2 : « la pièce provient de M_2 ».
B : « la pièce est utilisable », F : « son diamètre est inférieur à 8 cm ».

1°) Ecrire à l'aide de ces quatre événements les événements suivants :
- **a)** « La pièce est inutilisable, de diamètre inférieur à 8 cm et sort de M_1 ».
- **b)** « La pièce n'est pas utilisable ou provient de la machine M_2 ».
- **c)** « La pièce provient de M_1 ou elle a un diamètre supérieur à 9 cm et provient de M_2 ».

2°) A-t-on $(F \cup B) \cap E_2 = F \cup (B \cap E_2)$?

II. Probabilité d'un événement

1) Définitions

Définition
On définit une **probabilité** sur l'univers Ω en associant à tout événement A un nombre $P(A)$ tel que :

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

$$\boxed{\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

Définition
Lorsque les éventualités ont la même probabilité (exemple : lancer d'un dé non truqué), on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

2) Propriétés des probabilités

Propriété 1
Si A est un ensemble fini alors $P(A)$ est la somme des probabilités des éventualités contenues dans A.

EXEMPLE 1 : Supposons que le dé soit truqué, avec une chance sur deux d'avoir un 6, les autres résultats étant équiprobables.
On a alors le tableau suivant (ou loi de probabilité) :

Résultat	1	2	3	4	5	6
Probabilité	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/2

La probabilité d'obtenir un nombre pair est alors :
$P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{7}{10}$.

Propriété 2
Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités dans } A}{\text{nombre total d'éventualités}} = \frac{\text{card}\, A}{\text{card}\, \Omega}}$$

(nombre de cas favorables / nombre de cas possibles).

EXEMPLE 1 : si le dé n'est pas truqué, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\dfrac{1}{2}$ car il y a 6 cas possibles (nombre total d'éventualités) et 3 cas favorables (nombre d'éventualités réalisant « chiffre pair »).

Propriétés 3
Soient A et B deux événements. On admet les propriétés suivantes :

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

$$\text{Si } A \subset B \text{ alors } P(A) \leqslant P(B)$$

$$\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\boxed{P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)}.$$

Remarque : Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

EXEMPLE 1 : on suppose le dé non truqué. Soient les événements $A =$ « le chiffre est pair », $B =$ « le chiffre est inférieur à 5 », $C =$ « on obtient un 5 ». Nous avons $P(A) = \dfrac{3}{6}$ et $P(B) = \dfrac{4}{6}$.
De plus $A \cap B$ est l'événement « on obtient un chiffre pair inférieur à 5 » donc $P(A \cap B) = \dfrac{2}{6}$. L'événement $A \cup B$ est « le chiffre est pair ou inférieur à 5 » donc $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ d'où $P(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$.
En utilisant le cours, on retrouve le même résultat :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$.
Nous avons $P(C) = \dfrac{1}{6}$ et $A \cap C = \emptyset$. L'événement « le chiffre est pair ou est 5 » est $A \cup C$ et $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

EXEMPLE 2 : on lance deux fois un dé non truqué. Les éventualités sont des couples tels que (1 ; 4) ou (5 ; 5), etc. Il y a 36 couples possibles donc 36 éventualités pour cette expérience.
Soit A l'événement « On obtient un double 5 ».
Alors A ne contient qu'une éventualité : $A = \{(5\,;\,5)$ donc $P(A) = \dfrac{1}{36}$.
Soit B l'événement « On obtient au moins un chiffre supérieur à 2 ».
Alors $\bar{B}$ est l'événement « On n'obtient que des 1 ou des 2 ».
Au lieu de calculer $P(B)$, on calcule $P\left(\bar{B}\right)$ car $\bar{B}$ contient moins d'éventualités que A. On a $\bar{B} = \{(1\,;\,1), (1\,;\,2), (2\,;\,1), (2\,;\,2)\}$ donc $P(\bar{B}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$, on en déduit que $P(B) = \dfrac{8}{9}$.

EXEMPLE 4 : On sait que $P(A) = 0,8$, $P(\bar{B}) = 0,3$ et que $P(A \cap B) = 0,69$. Quelle est la valeur de $P(A \cup B)$?

Exercice III

On lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite. À chaque lancer, on note P quand la pièce tombe sur pile et F sinon.

1°) Soit E : « on obtient au moins une fois face ». Calculer $p(E)$.

2°) Soit G l'événement « on obtient au moins deux fois pile » et H l'événement « le dernier lancer donne face ».

a) Calculer $p(G)$.
b) Calculer $p(H)$.
c) Définir l'événement $G \cap H$ puis calculer $p(G \cap H)$.
d) Définir l'événement $G \cup H$ puis calculer $p(G \cup H)$.

Exercice IV

Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants des achats :

- 80 % des achats sont payés par chèques
- 70 % des achats sont inférieurs à 100 € dont 20 % réglés en espèces
- 2 % des clients ont utilisé la carte bancaire, celle-ci ne permet pas de payer les achats inférieurs à 100 €

1°) Recopier et compléter le tableau suivant :

	Montant $<$ 100 €	Montant $>$ 100 €	Total
Paiement en espèces			
Paiement par chèque			
Paiement par CB			
Total			100

2°) Une caissière enregistre un achat.
Calculer la probabilité des événements :
A : « C'est un achat supérieur strictement à 100 € ».
B : « L'achat est supérieur strictement à 100 € et payé en espèces ».
C : « L'achat est payé en espèces ou est supérieur à 100 € ».

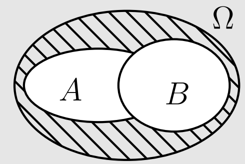
3°) Un achat est payé en espèces. Quelle est la probabilité de l'événement D : « Cet achat est inférieur à 100 € » ?

3) Tableau de Karnaugh

Exemple 4 : Avec les données de l'exemple 4, on demande $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

1re approche :

$\bar{A} \cap \bar{B}$ est l'ensemble des éventualités qui ne sont ni dans A ni dans B, c'est donc le contraire de $A \cup B$ (voir figure).



Ayant calculé $P(A \cup B) = 0,81$, on en déduit que
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 0,19$.

2e approche :

Le tableau qui suit est un tableau de Karnaugh :

	A	$\bar{A}$	
B	$0,69$		
$\bar{B}$			$0,3$
	$0,8$		

dans lequel on a indiqué les valeurs de $P(A)$, de $P(\bar{B})$ et de $P(A \cap B)$.
Il ne reste plus qu'à le compléter pour trouver $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Exercice V (tableaux de Karnaugh)

1°) a) Compléter les tableaux de Karnaugh suivants :

	A	$\bar{A}$	
B	$0,2$		
$\bar{B}$			$0,3$
	$0,4$		

	A	$\bar{A}$	
B			$0,8$
$\bar{B}$		$0,1$	
	$0,3$		

b) Indiquer, dans le premier cas, les valeurs de :
$P(\bar{A})$ $\quad P(A \cap \bar{B})$ $\quad P(A \cup \bar{B})$ $\quad P(\bar{A} \cup \bar{B})$

2°) Une usine dispose de deux machines M$_1$ et M$_2$ qui fabriquent le même type de pièces qui peuvent être défectueuses ou non. La machine M$_1$ assure 35 % de la production. Une étude statistique montre qu'il y a, dans la production, 2 % de pièces défectueuses et provenant de M$_2$ et que 97 % des pièces de la production ne sont pas défectueuses.
On prélève une pièce au hasard dans la production.

a) Compléter un tableau de Karnaugh comportant les données précédentes.

b) En déduire la probabilité des événements suivants :

i) « La pièce est défectueuse ».

ii) « La pièce provient de M$_1$ ou est défectueuse ».

iii) « La pièce provient de M$_2$ et n'est pas défectueuse ».

4) Probabilité conditionnelle

Nous nous intéressons ici aux cas où la réalisation d'un événement dépend de celle d'un autre événement.

Exemple 5 :

Une entreprise reçoit des pièces mécaniques de deux fournisseurs A et B, la première fournissant 70 % des pièces.
Parmi les pièces du fournisseur A, il y en a 40 % de première qualité ; parmi les pièces du fournisseur B, il y en a 20 % de première qualité.
On choisit une pièce au hasard. On cherche la probabilité des événements :

- E_1 : « La pièce vient du fournisseur A et est de première qualité »
- E_2 : « La pièce est de première qualité ».

Réponses :

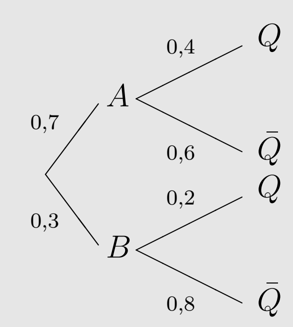
On suppose qu'il y a 100 pièces dans la commande totale (on se convaincra que cette supposition ne change rien aux calculs de proportions ...).

Notons A l'événement « La pièce provient du fournisseur A » et Q l'événement « La pièce est de première qualité ».

– Calculons $P(E_1)$ (donc $P(A \cap Q)$).
Il y a 70 pièces du fournisseur A et, parmi celles-ci, $\dfrac{40}{100} \times 70 = 28$ sont de première qualité. Donc $P(E_1) = \dfrac{28}{100} = 0,28$.

– Calculons $P(E_2) = P(Q)$.
Sur les 100 pièces, il y en a 30 qui viennent du fournisseur B, et parmi celles-ci, $\dfrac{20}{100} \times 30 = 6$ sont de première qualité. Donc au total, $28 + 6 = 34$ sont de première qualité d'où $P(E_2) = \dfrac{34}{100} = 0,34$.

Remarquons que si nous choisissons une pièce parmi celles du fournisseur A alors la probabilité qu'elle soit de première qualité est de 0,4. Cette probabilité est appelée « probabilité de Q sachant A » et notée $P_A(Q)$. C'est une **probabilité conditionnelle** (**si** la pièce vient du fournisseur A **alors** la probabilité quelle soit de première qualité est 0,4). L'**arbre pondéré** ci-contre résume les différents cas.



On vérifiera que : $P_A(Q) = \dfrac{P(A \cap Q)}{P(A)}$ (en effet : $0,4 = \dfrac{0,28}{0,7}$).

Définition

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}$$

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».
On dit que c'est une probabilité conditionnelle.

Conséquence

On a $\boxed{P(B \cap A) = P(B/A) \times P(A) = P(A/B) \times P(B)}$.

Remarque : ne confondez pas $P(A \cap B)$ et $P(A/B)$! Avec l'exemple précédent, comparez les deux questions suivantes :

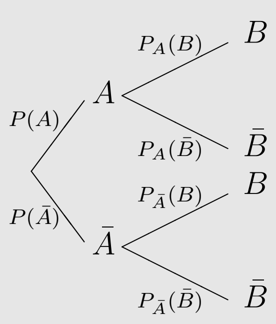
— « Déterminer la probabilité qu'une pièce provienne du fournisseur A et soit de première qualité » : on demande alors le calcul de $P(A \cap Q)$; l'univers est l'ensemble des pièces.
La réponse est donc 0,28.

— « On choisit une pièce du fournisseur A. Déterminer alors la probabilité qu'elle soit de première qualité » : on demande ici le calcul de $P_A(Q)$; l'univers est l'ensemble des pièces du fournisseur A.
La réponse est donc 0,4.

La notion de probabilité conditionnelle aide au calcul de $P(B)$ en séparant deux cas possibles : soit A est réalisé soit il ne l'est pas. On peut utiliser pour cela un arbre pondéré qui obéït à deux principes.

– La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1.

– On a, par exemple, $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$, en suivant le chemin relatif à $\bar{A} \cap B$.



Exercice VI (extrait d'un sujet de BTS)

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,010 et 0,008. De plus, la probabilité de l'événement « la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne » est égale à 0,4.

1°) Montrer que la probabilité d'avoir les deux machines en panne pendant la même période est égale à 0,004.

2°) En déduire la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne.

3°) Calculer la probabilité que les machines fonctionnent toutes les deux sur cette période.

Exercice VII

Une urne contient 5 boules rouges et 2 boules noires. On choisit deux boules, successivement et sans remise. Soient les événements E_1 : « la première boule est rouge » et E_2 : « la seconde boule est rouge ».
Calculer les probabilités que :

1°) La première boule soit rouge.

2°) La seconde boule soit rouge sachant que la première l'est.

3°) La seconde boule soit rouge sachant que la première ne l'est pas.

4°) Les deux boules soient rouges.

5°) La première boule soit rouge sachant que la seconde l'est.

5) Indépendance

Définition

Deux événements sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Le fait que A soit réalisé ou non n'influe alors pas sur la probabilité que B se réalise puisque $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B) \times P(A)}{P(A)} = P(B)$.

Exemple 6 : On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « on tire un valet ». Soit B l'événement « on tire un carreau ». Les évenements A et B sont indépendants. En effet, le fait de savoir que la carte est un carreau n'augmente pas la probabilité d'avoir un valet.
Vérifions le : $P(A) = \dfrac{1}{8}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$ et on a bien $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (donc $P_B(A) = P(A)$).

Remarque : Les tirages avec remises donnent lieu à des résultats indépendants.

EXEMPLE 7 : Tirage avec ou sans remise.
On considère une boîte contenant 20 boules dont 13 rouges et 7 noires. On prélève successivement deux boules et on cherche la probabilité d'obtenir deux boules rouges. Notons R_1 et R_2 les événements :
R_1 : "la première boule est rouge"
R_2 : "la seconde boule est rouge".
Nous cherchons donc $P(R_1 \cap R_2)$.

— 1^er^ cas : avec remise. On prend une première boule que l'on remet dans la boîte puis on en tire une seconde (qui peut être éventuellement la même que la première).
Le résultat du premier tirage n'influe pas sur celui du second : les événements R_1 et R_2 sont indépendants donc :
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = \left(\frac{13}{20}\right)^2.$$
— 2^e^ cas : sans remise. On prend une première boule puis une seconde sans remettre la première dans l'urne.
Si R_1 est réalisé alors il reste 12 boules rouges sur 19 restantes pour le second tirage et donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{12}{19}$. On en déduit que :
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{13}{20} \times \frac{12}{19} = \frac{156}{380}.$$

Exercice VIII (extrait d'un sujet de BTS)
Une entreprise fabrique des rivets "C 8.25".
Pour ces rivets, deux défauts de fabrication seulement sont possibles : un défaut de diamètre et un défaut de longueur.
Une étude statistique permet d'admettre que, pour un rivet choisi au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement A : « le rivet possède un défaut de diamètre » est $P(A) = 0,02$ et la probabilité de l'événement B : « le rivet possède un défaut de longueur » est $P(B) = 0,03$.
On admet que les événements A et B sont indépendants.
Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :
E_1 : « le rivet possède les deux défauts »
E_2 : « le rivet possède au moins un défaut »
E_3 : « le rivet ne possède aucun des deux défauts ».

Exercice IX
Deux entreprises doivent intervenir sur un chantier : une de plomberie et une d'électricité. La probabilité que la première ne respecte pas son planning est de 0,2 tandis qu'elle est de 0,3 pour la seconde. On suppose qu'il n'y a pas d'influence du respect ou non du délai par une entreprise sur le respect du délai par l'autre entreprise. Calculez la probabilité que :

1°) aucune entreprise ne respecte son délai ;

2°) les deux entreprises respectent leurs délais ;

3°) au moins une entreprise respecte son délai.

Exercice X
On considère une pièce truquée telle la probabilité d'obtenir un pile est de 0,7. On lance deux fois cette pièce.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile ?

2°) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?

Exercice XI
On considère une pièce truquée de telle façon que le pile ait deux chances sur trois d'apparaître. On lance cette pièce vingt fois de suite.

1°) Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait aucun pile.

2°) Calculer la probabilité pour qu'il y ait un seul pile.

3°) Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement trois piles.