Cours et exercices : Équations différentielles du second ordre

(à coefficients constants)

I. Nombres complexes

1) Définitions et quelques calculs

- On admet l'existence d'un nombre i (notation dûe à Euler) tel que $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$.
- Un nombre tel que, par exemple, $z = -2+3\mathrm{i}$ est un **nombre complexe** écrit sous la **forme algébrique** : $\boxed{z = a + b\mathrm{i}}$ (avec a et b réels).
- L'**ensemble des nombres complexes** est noté $\mathbb{C}$.
- Le **conjugué** de $z = a + b\mathrm{i}$ est $\boxed{\bar{z} = a - b\mathrm{i}}$.

Exemples 1 :
Si $z = 3 + 2\mathrm{i}$ alors $\bar{z} = 3 - 2\mathrm{i}$. Si $z = \mathrm{i} - 1$ alors $\bar{z} = -\mathrm{i} - 1$.

2) Addition, soustraction, multiplication

Exemples 2 :
- $(2 + 3\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) - (5 + 3\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}$.
- $(2 - 3\mathrm{i})(5\mathrm{i} + 1) = 10\mathrm{i} + 2 - 15\mathrm{i}^2 - 3\mathrm{i} = 17 + 7\mathrm{i}$.

Exercice I
Soient $z_1 = 3 - 2\,\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + 3\,\mathrm{i}$. Donnez la forme algébrique de :

1°) $\bar{z}_2$	2°) $z_1 + z_2$	3°) $3z_1 - z_2$	4°) $z_1 z_2$
5°) $\bar{z}_1 \bar{z}_2$	6°) $z_1 \bar{z}_1$	7°) z_2^2	8°) z_2^3

3) Équation du second degré à coefficients réels.

Théorème 1 (équations du second degré à coefficients réels)
Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c réels), on calcule le ***discriminant*** $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.
Il y a alors trois cas :

Signe de Δ	*Solutions de l'équation*	*Commentaire*
$\Delta > 0$	$\boxed{z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$; $\boxed{z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$	*Deux solutions réelles*
$\Delta = 0$	$\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$	*Une solution réelle*
$\Delta < 0$	$\boxed{z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$; $\boxed{z_2 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$	*Deux solutions complexes*

Exemple 3 : résoudre les équations suivantes :
$z^2 - 3z + 2 = 0$ $\quad 9z^2 + 12z + 4 = 0$ $\quad z^2 + z + 1 = 0$

Réponses : La première équation a pour solutions $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$.
La seconde équation a pour solution $z_0 = -\dfrac{2}{3}$.
La dernière équation a pour solutions $z_1 = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Exercice II
Résoudre les équations suivantes :

1°) $z^2 - 5z + 4 = 0$	2°) $2z^2 + 12z + 18 = 0$	3°) $z^2 + 3 = 0$
4°) $z^2 = z - 1$	5°) $r^2 - 5r = 0$	6°) $r^2 - 2r + 5 = 0$

II. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

On cherche ici des fonctions solutions d'une équation différentielle de la forme $\boxed{(\mathrm{E}_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0}$ où a, b, c sont des constantes ($a \neq 0$).

La solution générale de (E_0) (les solutions de (E_0)) sera notée y_0.
Pour trouver y_0, on résout d'abord l'**équation caractéristique** :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}.$$

Pour cela, on calcule d'abord le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 2 (solutions de $ay'' + by' + cy = 0$)
Premier cas : si $\Delta > 0$.

$ar^2 + br + c = 0$ a alors deux solutions $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

La solution générale de (E_0) s'écrit alors : $\boxed{y_0(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}}$.

Deuxième cas : si $\Delta = 0$.

$ar^2 + br + c = 0$ a alors une solution $r = -\dfrac{b}{2a}$.

La solution générale de (E_0) s'écrit alors : $\boxed{y_0(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}}$.

Troisième cas : si $\Delta < 0$.

$ar^2 + br + c = 0$ a alors deux solutions complexes

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} & \text{et} \quad r_2 &= \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} & &= -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \alpha - i\beta & &= \alpha + i\beta \end{aligned}$$

(on dit que r_1 et r_2 sont deux complexes conjugués).

La solution générale de (E_0) s'écrit alors : $\boxed{y_0(t) = (\lambda\cos\beta t + \mu\sin\beta t)e^{\alpha t}}$.

Exemples 4 :
Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 0$; $4y'' + 12y' + 9y = 0$ et $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Exercice III

1°) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 5y' + 4y = 0$	b) $x'' + x' + x = 0$	c) $3y'' + 5y = 0$
d) $4y'' = 4y' - 9y$	e) $4x'' + 4x' + x = 0$	f) $-3y'' + 2y' - 4y = 0$

2°) Trouvez la solution f de $y'' - 5y' + 4y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$.

3°) Trouvez la solution g de $x'' + x' + x = 0$ vérifiant $g(0) = -1$ et $g'(0) = 5$.

Exercice IV

Dîtes si les fonctions suivantes sont solutions de l'équation différentielle $y'' - 5y' + 4y = 0$:

1°) $f(t) = 5t - 3$ | 2°) $g(x) = e^t$ | 3°) $h(t) = e^{-3t} - e^t$ | 4°) $h(t) = 2e^t - 7e^{4t}$

III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

1) Résolution de (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$

On cherche ici des fonctions solutions d'une équation différentielle de la forme $\boxed{(E) \ : \ ay'' + by' + cy = d(t)}$ où a, b, c sont des constantes ($a \neq 0$) et d est une fonction continue sur un intervalle I.

Théorème 3

On obtient la solution générale y_g de l'équation avec second membre (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$ en trouvant une solution particulière y_p de (E) et en lui ajoutant la solution générale y_0 de l'équation sans second membre (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$ ce qui peut s'écrire $\boxed{y_g = y_p + y_0}$.

Exemple 5 : Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = 6t^2 - 19t + 8$.
Vérifier que $g(t) = 2t^2 - t$ est une solution particulière de (E). En déduire la solution générale de (E).
Réponse : Si $g(t) = 2t^2 - t$ alors $g'(t) = 4t - 1$ et $g''(t) = 4$ donc $g'' - 4g' + 3g = 4 - 4(4t-1) + 3(2t^2 - t) = 6t^2 - 19t + 8$ donc g est bien une solution particulière de (E). La solution générale de (E_0) est $(\ldots)$ $y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}$ donc la solution générale de (E) est $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + 2t^2 - t$.

Exercice V (BTS 2000)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2$ est une solution de (E).

2°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3°) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2) Recherche d'une solution particulière

On peut chercher une solution particulière ayant la même forme que $d(t)$.

EXEMPLE 16 : Comment obtient-on la solution particulière $g(t) = 2t^2 - t$ de l'exemple précédent (équation $y'' - 4y' + 3y = 6t^2 - 19t + 8$) ?
Réponse : Ici, $d(t)$ est un polynôme de degré 2, cherchons donc une solution de la forme $y(t) = At^2 + Bt + C$. On a alors :
$y'' - 4y' + 3y = 6t^2 - 19t + 8$
$\iff 3At^2 + (3B - 8A)t + 2A - 4B + 3C = 6t^2 - 19t + 8$
donc (...) il faut que $A = 2$, $B = -1$ et $C = 0$, on en déduit que $y(t) = 2t^2 - t$ est une solution particulière.

Exercice VI

On veut résoudre l'é.d. (E) : $y'' + 2y' - 3y = 3t^2 - 1$.

1°) Trouvez trois nombres a, b et c tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = at^2 + bt + c$ soit une solution particulière de (E).

2°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 2y' - 3y = 0$.

3°) En déduire la solution générale de (E).

3) Solution vérifiant des conditions

EXEMPLE 16 :
Trouver la solution f de $y'' - 4y' + 3y = 6t^2 - 19t + 8$ vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.
Réponse :
On a $f(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + 2t^2 - t$ donc $f(0) = \lambda + \mu$. Par ailleurs, $f'(t) = \lambda e^t + 3\mu e^{3t} + 4t - 1$ donc $f'(0) = \lambda + 3\mu - 1$ d'où le système
$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 3\mu - 1 = -1 \end{cases}$ qui donne (...) $\mu = -1$ et $\lambda = 3$.
La solution recherchée est donc : $f(t) = 3e^t - e^{3t} + 2t^2 - t$.

Exercice VII (BTS grp B 2006)

On considère l'équation différentielle (E) : $y" - 3y' - 4y = -5\, e^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1°) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$

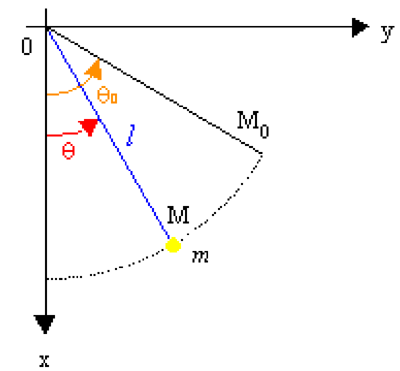
2°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\, e^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

Exercice VIII

Un pendule simple est constitué d'une boule suspendue à un fil inextensible de masse nulle. On écarte la boule de sa position d'équilibre puis on la lâche.
L'angle α (en radians) entre le fil et la position d'équilibre dépend du temps : on note $\alpha = \alpha(t)$.
Les lois de Newton montre qu'alors $\alpha'' = -\left(\dfrac{g}{\ell}\right) \sin\alpha$; or, pour les petits angles, $\sin\alpha \simeq \alpha$.



1°) Résoudre l'équation différentielle : $y'' = -\left(\dfrac{g}{\ell}\right) y$.
Données : la longueur du fil est $\ell = 0,2$ mètre ; l'accélération de la gravitation est $g \simeq 9,8$ m.s^{-2}.

2°) On a écarté le pendule de 0,3 radian par rapport à sa position d'équilibre avant de le lâcher : on a donc $\alpha(0) = 0,3$ et $\alpha'(0) = 0$ (vitesse initiale nulle).
En déduire l'expression de $\alpha(t)$.

3°) Au bout de combien de temps le pendule passe-t-il par sa position d'équilibre ?