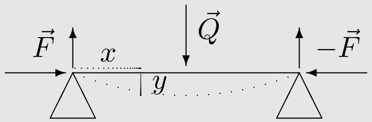
Cours et exercices : Équations différentielles du 1er ordre

I. Définitions et notations

1) Notion d'équation différentielle

Exemple 1 :



Considérons une poutre de longueur ℓ posée sur deux points d'appui et soumise aux actions $\vec{F}$ et $\vec{Q}$. On cherche alors à déterminer l'expression de la déformée $y(x)$ de la poutre (une fonction qui à chaque x – abscisse d'un point de la poutre – associe le fléchissement y de la poutre).
Les lois de la mécanique nous amènent à l'équation $y''(x) + k^2 y(x) = -\lambda x$.
Une telle relation entre f, f', f'', etc. est appelée **équation différentielle**.

Exemples 2 : $f'(t) = 2f(t)$; $f''(t) - t^2 f(t) = -3t$ sont aussi des équations différentielles.

2) Notations

La fonction inconnue est souvent notée y (parfois x, la variable étant souvent alors t), ainsi l'équation différentielle $f''(t) = tf(t)$ peut aussi s'écrire $y''(t) = ty(t)$ ou $x''(t) = tx(t)$.
La variable de la fonction est en général omise, ainsi $y''(t) = ty(t)$ peut être écrite $y'' = ty$ (ou $x'' = tx$).

3) « Résoudre » une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle signifie trouver toutes les fonctions solutions définies sur cet intervalle.

Exemple 3 :
Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' = t$.
Réponse :
Par intégration, on trouve $y' = \dfrac{t^2}{2} + k_1$ puis $y = \dfrac{t^3}{6} + k_1 t + k_2$. Cette expression donne la **solution générale** de l'équation différentielle (E).
En choisissant deux valeurs pour k_1 et k_2 (par exemple $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$), on obtient une **solution particulière** (par exemple : $f(t) = \dfrac{t^3}{6} + 1$).

Remarque : pour vérifier qu'une fonction f est solution d'une équation différentielle, il suffit de remplacer y, y', etc. par $f(t)$, $f'(t)$ et de constater que l'équation est vérifiée.

Exemple 4 : Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = t^2$ est une solution de l'équation différentielle $y'' - ty' + y = 2 - t^2$.
Réponse :
Si $g(t) = t^2$ alors $g'(t) = 2t$ et $g''(t) = 2$ d'où
$g''(t) - tg'(t) + g(t) = 2 - t \times 2t + t^2 = 2 - t^2$ donc g est bien une solution de $y'' - ty' + y = 2 - t^2$.

Exercice I
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3t^2 - 2t + 5$.
Déterminez si f est solution des équations différentielles suivantes :

1°) $y'' = 3$

2°) $ty' - 2y = 2t - 2$

3°) $t\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2$

4°) $x' = 2tx - 1$

Exercice II
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = at + b$.
Déterminez les nombres a et b pour que f soit la solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 2t - 5$.

II. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

1) Équation différentielle (E_0) : $ay' + by = 0$

Théorème 1

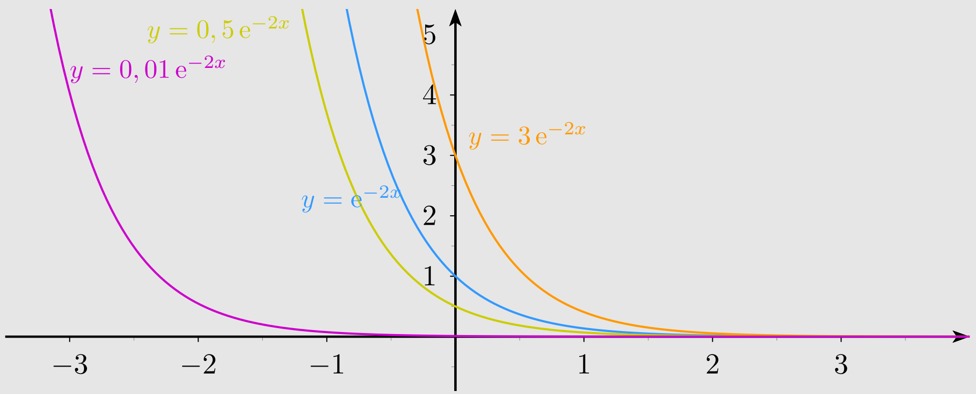
Soient a et b deux constantes (avec $a \neq 0$).

La solution générale de (E_0) : $ay' + by = 0$ s'écrit $\boxed{y_0 = k.\,\mathrm{e}^{(-b/a)t}}$
où k est une constante.

Exemple 5 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

Réponse : ici $a = 1$, $b = 2$ donc $-\dfrac{b}{a} = -2$ donc les solutions de $y' + 2y = 0$ s'écrivent $y = k.\,\mathrm{e}^{-2t}$.

Remarque : représentation graphique de quelques solutions particulières de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$:



Exemple 6 :

Résoudre $5y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Réponse : $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{5}$ donc les solutions de $5y' - y = 0$ s'écrivent $y = k.\,\mathrm{e}^{t/5}$.

Remarques :
– la fonction nulle est toujours solution de $ay' + by = 0$ (cas où $k = 0$) ;
– la donnée d'une condition de la forme $f(x) = y$ ou $f'(x) = p$ permet de trouver la valeur de k et donne alors une solution particulière de (E_0).

Exercice III

1°) Résoudre les équations différentielles :
(E_1) : $y' + 3y = 0$ (E_2) : $3y' = 5y$

2°) Donnez la solution de (E_1) qui à pour valeur 5 au temps $t = 0$.

Exercice IV (d'après http ://jehresmann.free.fr)

En 1940 des enfants qui couraient après leur chien près de Lascaux ont découvert une grotte dont les murs et le plafond sont recouverts de magnifiques peintures.
L'objectif de cet exercice est de déterminer l'époque de cette réalisation.

1°) On considére que la vitesse instantanée de désintégration du C14 est proportionnelle à chaque instant à la quantité de C14 contenue dans la matière : $q' = \lambda q$.
Résoudre cette équation différentielle.

2°) Les lois de la Chimie nous disent que 99,876 % de la masse de C14 présente dans le bois vivant l'est encore 10 ans après sa mise à feu (on a trouvé de la cendre dans la composition des peintures)
En déduire la valeur de λ.

3°) L'analyse chimique de la cendre contenue dans les peintures a déterminé que 85,5 % de la masse de C14 s'est désintégrée depuis la mise à feu du bois qui formé cette cendre.
En déduire la date de réalisation des peintures de Lascaux.

2) Équation différentielle $ay' + by = c(t)$

a) Équation différentielle sans second membre associée

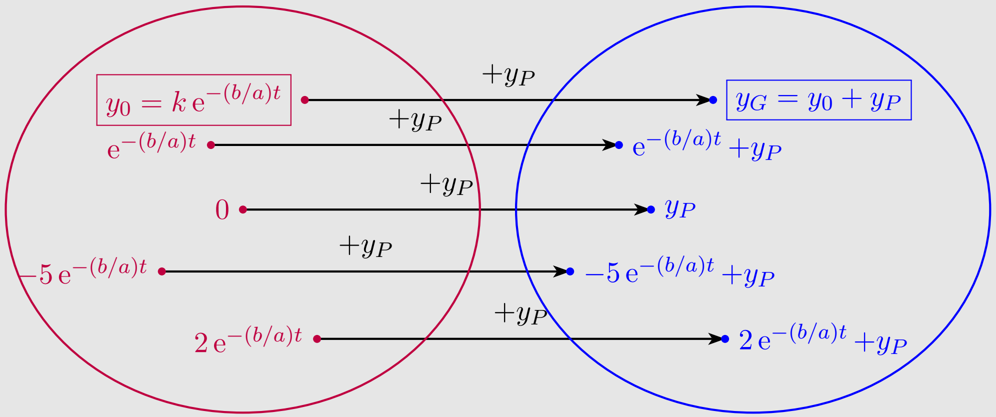
Exemple 7 : L'équation différentielle sans second membre associée à l'équation (E) : $2y' + 3y = \sin t$ est (E_0) : $2y' + 3y = 0$.

b) Solution générale de $ay' + by = c(t)$

Théorème 2

Soient a et b deux constantes (avec $a \neq 0$) et c une fonction continue sur un intervalle I.
On obtient la solution générale y_g de l'équation (E) : $ay'+by = c(t)$ en trouvant une solution particulière y_p de (E) et en lui ajoutant la solution générale y_0 de l'équation sans second membre (E_0) : $ay' + by = 0$ ce qui peut s'écrire $\boxed{y_g = y_0 + y_p = k\,\mathrm{e}^{-(b/a)t} + y_p}$.

Remarque : en remarquant que la fonction nulle est toujours solution de (E_0), on peut schématiser les choses de la façon suivante :



Solutions de (E_0) Solutions de (E)

Exemple 8 : Résoudre (E) : $3y' - y = 6t - t^2$ en remarquant que $f(t) = t^2$ est une solution particulière.

Réponse :

- Si $f(t) = t^2$ alors $f'(t) = 2t$ donc $3f' - f = 6t - t^2$ donc f est bien une solution particulière de (E).
- La solution générale de l'équation sans second membre $3y' - y = 0$ s'écrit $y_0 = k.\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t}$.
- La solution générale de l'équation (E) s'écrit donc $y = t^2 + k.\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t}$.

Exercice V

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' - y = t^3 - 11t^2 + 20t$.

1°) Résoudre l'équation différentielle $2y' - y = 0$.

2°) Vérifier que $f(t) = 5t^2 - t^3$ est une solution particulière de (E).

3°) En déduire la solution générale de (E).

c) Solution vérifiant une condition

Dans la pratique on a parfois besoin d'une solution vérifiant une certaine condition. Il suffit alors de déterminer la (ou les) constante(s) adéquates.

Exemple 9 : Trouver la solution f de $3y' - y = 6t - t^2$ vérifiant $f(0) = -6$.

Réponse :

Nous avons vu dans l'exemple précédent que $f(t) = t^2 + k.\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t}$.

Comme $f(0) = -6$, on trouve $f(0) = 0^2 + k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\times 0} = -6$ donc $k = -6$, la solution vérifiant $f(0) = -6$ est donc $f(t) = t^2 - 6\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t}$.

Remarque : on pourrait aussi avoir des conditions sur f', sur f'', etc.

Exercice VI

On veut résoudre l'é.d. (E) : $x' = x + (1-t)\ln t$.

1°) Vérifiez que $g(t) = t\ln t + 1$ est une solution particulière de (E).

2°) En déduire l'expression de la solution générale de (E)

3°) Déterminez la solution de (E) qui s'annule en 1.

Exercice VII

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4y' + 5y = 3t - 2$$

1°) Déterminez une fonction affine solution de (E).

2°) Déduisez-en toutes les solutions de (E).

3°) Trouvez la solution de (E) dont la courbe passe par le point $(0\,;-2)$.

Exercice VIII (sujet AEA 2014)
On souhaite étudier le refroidissement du café servi par une machine initialement à une température de 70°C. On suppose que la température ambiante de la pièce dans laquelle se trouve le café est constante et égale à 20°C. La température (en °C) du café à l'instant t (en min) vaut $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On modélise le problème par la loi de refroidissement, énoncée par Isaac Newton : « la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant », soit :

$$\theta' = k\,(\theta - \theta_0)$$

où θ est la température du corps étudié, θ' la vitesse de refroidissement, θ_0 la température ambiante et k une constante négative propre au corps étudié.
Dans l'exemple traité ici, on estime que la fonction f vérifie alors l'équation : $(E) :\quad y' + 0,2y = 4$
où y est une fonction de la variable réelle t et y' sa dérivée première.
On note f' la fonction dérivée de f. Elle correspond à la vitesse de refroidissement du café servi, en degrés par minute.

Partie A

1. Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle $E_0 :\quad y' + 0,2y = 0$.
2. Trouver le réel a tel que la fonction constante $g(t) = a$ soit solution de l'équation E sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire la solution générale de (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Déterminer la fonction f sachant que la température initiale du café est de 70°C.

Partie B
On admet que la fonction f, dont la courbe est représentée en annexe, est définie pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = 20 + 50\mathrm{e}^{-0,2t}$.
Pour la suite de cet exercice, en cas de résolution par lecture graphique, on laissera une trace des traits de construction, et on explicitera la démarche.

1. Justifier la décroissance de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et l'interpréter dans le contexte proposé.
2. Déterminer le comportement de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. Résoudre l'équation $f(t) = 42$ (arrondir à la seconde près).
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
5. Calculer $f'(0)$.

Partie C
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Les réponses doivent être justifiées.

On pourra s'aider des résultats obtenus précédemment. En cas de résolution par lecture graphique, on laissera une trace des traits de construction, et on explicitera la démarche.

1. La température du café finit par atteindre 19°C.
2. La vitesse de refroidissement du café à $t = 0$ est de 10 degrés par minutes.
3. Monsieur Lemcho n'apprécie son café que si sa température est supérieure à 42°C. Il dispose alors de moins de 3 minutes pour déguster son café.
4. La température moyenne du café durant les 10 premières minutes est d'environ 40°C, à un degré près.