

Coordonnées sphériques

I. Définition

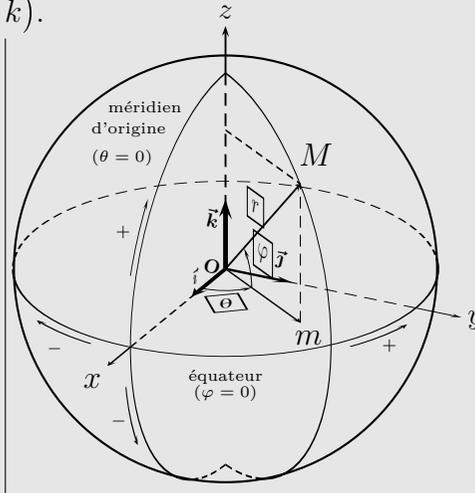
Soit M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes $(x; y; z)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le point M peut être repéré par la donnée de ses **coordonnées sphériques** :

- la longueur $r = OM$ appelée **rayon vecteur**
- sa **longitude** $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{Om})$
- sa **latitude** $\varphi = (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$.

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$



Remarque : pour les pôles ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$) on convient que $\theta = 0$.

EXEMPLE 1 : Le méridien de Greenwich est le grand cercle passant par les pôles et la ville de Greenwich. Il définit la longitude 0. L'équateur est le grand cercle placé dans le plan (xOy) perpendiculaire à l'axe des pôles (Oz) , il définit la latitude 0.

La ville du Cap a une longitude de $11^{\circ}22'$ E ($\theta \approx 11,37^{\circ}$) et $33^{\circ}55'$ S ($\varphi \approx -33,92^{\circ}$). r est le rayon de la Terre soit environ $r \approx 6371$ km.

Exercice I

1°) Convertissez les longitudes ou latitudes suivantes en degrés décimaux : $20^{\circ}10'$ E; $40,55$ grad S; $57^{\circ}32'$ N; 120 grad W.

2°) Déterminez la distance à vol d'oiseau entre les villes de Johannesburg (28° E; 26° S) et d'Istanbul (28° E; 41° N).

Donnée : le rayon moyen de la Terre est d'environ 6371 km.

II. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques et réciproquement

Les coordonnées polaires de m (dans le plan xOy) sont $(r \cos \varphi; \theta)$ d'où les coordonnées cartésiennes de \overrightarrow{Om} : $(r \cos \varphi \cos \theta; r \cos \varphi \sin \theta; 0)$.

Les coordonnées de \overrightarrow{mM} sont $(0; 0; r \sin \varphi)$.

Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$,

$$x = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = r \sin \varphi.$$

Exercice II

- 1°) a) Donnez les coordonnées cartésiennes de la ville du Cap.
b) Donnez les coordonnées cartésiennes de la ville de Paris (longitude $2,6$ grades Est ; latitude $54,3$ grades Nord).
c) En déduire la distance parcourue par une taupe (nageuse) entre ces deux villes.
- 2°) Donnez les coordonnées sphériques d'un point P de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3}; 1; -2\sqrt{3})$.

III. Distance sphérique

Soit M et M' deux points d'une sphère (S) de centre O et de rayon r . La **distance sphérique** $\widehat{MM'}$ est la longueur de l'arc de grand cercle le plus petit joignant M et M' (distance à vol d'oiseau). On a alors :

$$\widehat{MM'} = r\alpha \text{ où } \alpha = \widehat{MOM'} \text{ (mesuré en radians)}.$$

On démontre que $\cos \alpha = \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\theta - \theta') + \sin \varphi \sin \varphi'$.

Exercice III

Calculez la distance sphérique de Paris à la ville du Cap.

Exercice IV

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère S de centre O et de rayon 1. On considère les points suivants :

$$A \begin{cases} \text{longitude} = 90^\circ \text{ Ouest} \\ \text{latitude} = 30^\circ \text{ Nord} \end{cases} \quad B \begin{cases} \text{longitude} = 180^\circ \\ \text{latitude} = 45^\circ \text{ Sud} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{longitude} = 60^\circ \text{ Est} \\ \text{latitude} = 60^\circ \text{ Nord} \end{cases}$$

$$D (0; -1; 0) \quad E \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad F \left(\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

On appelle G le pôle sud.

1°) Faire une figure (pas trop petite...); placer approximativement les points.

2°) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et G .

b) Calculer les coordonnées sphériques des points D, E et F .

Exercice IV

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère S de centre O et de rayon 1. On considère les points suivants :

$$A \begin{cases} \text{longitude} = 90^\circ \text{ Ouest} \\ \text{latitude} = 30^\circ \text{ Nord} \end{cases} \quad B \begin{cases} \text{longitude} = 180^\circ \\ \text{latitude} = 45^\circ \text{ Sud} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{longitude} = 60^\circ \text{ Est} \\ \text{latitude} = 60^\circ \text{ Nord} \end{cases}$$

$$D (0; -1; 0) \quad E \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad F \left(\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

On appelle G le pôle sud.

1°) Faire une figure (pas trop petite...); placer approximativement les points.

2°) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et G .

b) Calculer les coordonnées sphériques des points D, E et F .

Exercice IV

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère S de centre O et de rayon 1. On considère les points suivants :

$$A \begin{cases} \text{longitude} = 90^\circ \text{ Ouest} \\ \text{latitude} = 30^\circ \text{ Nord} \end{cases} \quad B \begin{cases} \text{longitude} = 180^\circ \\ \text{latitude} = 45^\circ \text{ Sud} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{longitude} = 60^\circ \text{ Est} \\ \text{latitude} = 60^\circ \text{ Nord} \end{cases}$$

$$D (0; -1; 0) \quad E \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad F \left(\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

On appelle G le pôle sud.

1°) Faire une figure (pas trop petite...); placer approximativement les points.

2°) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et G .

b) Calculer les coordonnées sphériques des points D, E et F .

Exercice IV

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère S de centre O et de rayon 1. On considère les points suivants :

$$A \begin{cases} \text{longitude} = 90^\circ \text{ Ouest} \\ \text{latitude} = 30^\circ \text{ Nord} \end{cases} \quad B \begin{cases} \text{longitude} = 180^\circ \\ \text{latitude} = 45^\circ \text{ Sud} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{longitude} = 60^\circ \text{ Est} \\ \text{latitude} = 60^\circ \text{ Nord} \end{cases}$$

$$D (0; -1; 0) \quad E \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad F \left(\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

On appelle G le pôle sud.

1°) Faire une figure (pas trop petite...); placer approximativement les points.

2°) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et G .

b) Calculer les coordonnées sphériques des points D, E et F .