Cours et exercices : Calcul intégral

Exercice I

1°) Complétez la troisième ligne du tableau suivant :

dérive

dérive

F							
f	$2x$	$2x+3$	$3x^2$	x^5	$3x^4$	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{x^4}{4}$
f'							

2°) Complétez la première ligne du tableau dans laquelle devront figurer les *primitives* des fonctions f.

I. Primitives

1) Définition et propriétés

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. Une fonction F est une **primitive** de f sur $[\,a\,;\,b\,]$ si F est dérivable sur $[\,a\,;\,b\,]$ et si $\boxed{F' = f}$.

> Exemple 1 : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + 4$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

Théorème 1 (existence)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (une infinité) sur cet intervalle.

Théorème 2 (lien entre les primitives d'une même fonction)

Si F est une primitive de f alors les autres primitives de f s'écrivent $F + k$ où k est une constante quelconque

> Exemple 2 : Les primitives de la fonction $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ s'écrivent $F(x) = x^2 + k$.

Exercice II (primitives de polynômes)

Donnez les primitives des fonctions suivantes :

a) $\ell(x) = 4$	b) $m(x) = 2x - 1$	c) $n(x) = 4x^3$
d) $o(x) = x^4$	e) $p(x) = 2x^2$	f) $q(r) = 2\pi r$
g) $r(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	h) $s(x) = 2x^2 - 5x + 3$	i) $t(r) = 4\pi r^2$

Exercice III (extrait d'un sujet de BTS industriel)

Soit la fonction f, définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln x$.

1°) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.

2°) En déduire une primitive de f.

3°) Déterminer la primitive de f qui s'annule en e.

Exercice IV (vérifier une primitive)

Dans les exemples suivants, déterminer si les fonctions g sont des primitives des fonctions f (sur un certain intervalle).

1°) $f(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^x$ et $g(x) = (x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{e}^x$.

2°) $f(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{2x}$ et $g(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{2x}$.

3°) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x}$.

4°) $f(x) = (x+2)\ln(x+2)$ et $g(x) = \left[\ln(x+2) - \dfrac{1}{2}\right]\dfrac{(x+2)^2}{2}$ (à trouver à la main pour les plus forts, à la calculatrice sinon).

2) Recherche d'une primitive

Propriété 1 (primitives des fonctions usuelles)

Fonction	*Primitives*
0	k
$x^n, n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + k$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$

Fonction	*Primitives*
e^x	$\mathrm{e}^x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + k$

Exercice V

Déterminer les primitives des fonctions suivantes définies sur $]0\,;\,+\infty[$:

a) $f_1(x) = 4x^3 + 2x^4$	b) $f_2(t) = 3 - \dfrac{7}{t}$	c) $f_3(x) = 2x + \mathrm{e}^x$
d) $f_4(z) = \dfrac{1}{z} - 2\,\mathrm{e}^z$	e) $f_5(x) = x - \dfrac{2}{x}$	f) $f_6(x) = (3x+2)^2$
g) $f_7(x) = -3\cos(x)$	h) $f_8(x) = -2\sin(x)$	i) $f_9(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$

Exercice VI (en chûte libre)

On lâche au temps $t = 0$ un objet pesant 5 kg d'une hauteur de 100 mètres. On suppose que ce solide n'est soumis qu'à son poids, qui l'attire vers le sol (on néglige donc la résistance de l'air).

L'accélération de la pesanteur g est, sur Terre, environ égale à 9,8.

1°) Sachant que l'accélération est la dérivée de la vitesse (instantanée), donnez l'expression de la vitesse de l'objet en fonction du temps t.

2°) Sachant que la vitesse est la dérivée de la position, donnez l'expression de la position de l'objet en fonction du temps t.

3°) Dans combien de temps touchera-t-il le sol ?

Remarque : la primitive d'une somme est la somme des primitives. Ceci est **faux** pour un produit ou un quotient.

> EXEMPLE 3 : Si $f(x) = 3 + \mathrm{e}^x$ alors $F(x) = 3x + \mathrm{e}^x + k$.
> Par contre, si $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x$ alors $F(x) \neq 3x\,\mathrm{e}^x + k$!

Propriété 2 (primitives liées aux fonctions composées)

On obtient le tableau suivant en utilisant les formules de dérivation des fonctions composées :

Fonction	*Primitives*
$u'.u^n, n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$u'.\,\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + k$

> EXEMPLES 4 :
> - Si $f(x) = 2x.\,\mathrm{e}^{x^2-3}$ alors $F(x) = \mathrm{e}^{x^2-3} + k$.
> - Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ alors $F(x) = \dfrac{1}{2}.\ln(x^2+1) + k$.
> - Si $f(x) = x(x^2+3)^7$ alors $F(x) = \dfrac{1}{16}.(x^2+3)^8 + k$.

Remarque : on peut ainsi trouver des primitives pour certains produits ou certains quotients.

Exercice VII (primitives liées aux fonctions composées)

Trouvez une primitive des fonctions suivantes :

1°) $5x + \dfrac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 4} - 2$	2°) $\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$	3°) $(x-2)^7$
4°) $(2x-5)^{10}$	5°) $x\,\mathrm{e}^{-x^2}$	6°) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Vérifiez avec votre calculatrice. . .

Propriété 3

Fonction	*Primitives*
$\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+k$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+k$

où ω et φ sont des constantes.

Exemple 5 : Si $f(x)=\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ alors $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)+k$.

Exercice VIII (primitives liées aux fonctions trigonométriques)
Trouver une primitive des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1°) $\cos(t+\pi)$ | 2°) $\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ | 3°) $2\cos(3t-\pi)$

II. Intégrale

1) Définition, interprétation graphique

a) Définition

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$. On appelle **intégrale de *f* de *a* à *b*** le nombre noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ égal à $F(b)-F(a)$ où F est une des primitives de f :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)}.$$

Notation : le nombre $F(b)-F(a)$ est couramment noté $[F(x)]_a^b$. Ainsi, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b$.

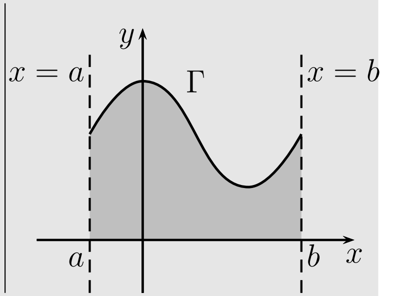
Exemple 6 : $\displaystyle\int_{-2}^{3}(2x-3)\,\mathrm{d}x=\left[x^2-3x\right]_{-2}^{3}=(9-9)-(4+6)=-10.$

Exercice IX (Calculs d'intégrales)
Calculez les intégrales suivantes :

$$I=\int_1^2\left(x^3+2x^2+3x-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x;\ J=\int_0^1-7e^x\,\mathrm{d}x;\ L=\int_0^{\ln 2}(2e^{-x}-e^{2x}+3)\,\mathrm{d}x$$

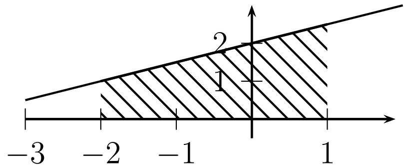
b) Interprétation graphique

– Cas d'une fonction positive.
Soit Γ la courbe d'une fonction f continue et *positive* sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire (exprimée en unités d'aires) de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

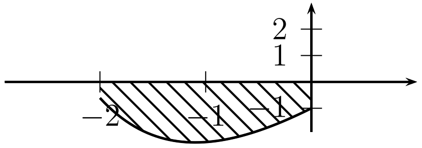


Remarques :
– L'unité d'aire est égale à $\|\vec{\imath}\,\|\,.\,\|\vec{\jmath}\,\|$.
– Si f est négative sur $[\,a\,;\,b\,]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ désignera l'opposé de l'aire « entre la courbe et l'axe des abscisses ».
– Si f change de signe sur $[\,a\,;\,b\,]$ alors on découpera l'intervalle en des sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Exercice X (calculs d'aires)
Pour chaque question, calculez l'aire du domaine hachuré.



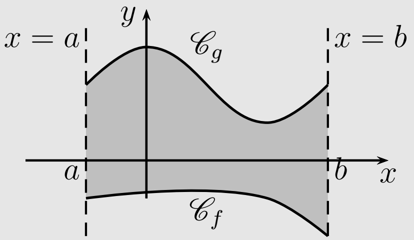
1°) $f(x)=\dfrac{x}{2}+2$.
Unités sur les axes : 1 cm en abscisse, 5 mm en ordonnée.



2°) $g(x)=e^{-x}+3x-2$.
Unités : 1,4 cm en abscisse, 3,5 mm en ordonnée.

Exercice XI
Soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction "cube" ($f(x) = x^3$). Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$ (unité d'aire : 1 cm^2).

Propriété 4
L'aire du domaine défini par $\{M(x;y), a \leqslant x \leqslant b$ *et* $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ *s'obtient en calculant* $\boxed{\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x}$.



Exercice XII

Exercice XIII (d'après BTS industriel)
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$.

1°) a) Á l'aide de la calculatrice, conjecturez les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on admettra que ces conjectures sont justes dans la suite).

  b) En déduire que l'existence d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

  c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2°) Utilisez votre calculatrice (ou Geogebra) pour trouver une primitive de f. En déduire l'aire, en cm^2, du domaine compris entre $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.
On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} près.

2) Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[\,a\,;\,b\,]$ le réel $\boxed{\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Exemple 7 :
La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$ sur l'intervalle $[\,-2\,;\,3\,]$ est donc $\mu = \dfrac{1}{3-(-2)}\displaystyle\int_{-2}^{3}(2x-3)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\times(-10) = -2$.

Exercice XIV
Calculez les valeurs moyennes de la fonction f sur l'intervalle I :

1°) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ avec $I = [\,-2\,;\,0\,]$.

2°) $f(x) = \cos(\pi x)$ avec $I = [\,-1\,;\,1\,]$.

3°) $f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}25x}$ avec $I = [\,0\,;\,1\,]$.

3) Propriétés de l'intégrale

Dans la suite a et b sont deux réels, f et g deux fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$ ou $[\,b\,;\,a\,]$; λ un réel.

Propriétés 5

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0}.$$

Propriété 6 (linéarité)

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f(x))\,\mathrm{d}x = \lambda.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Propriété 7 (relation « de Chasles »)
Pour tout $c \in [\,a\,;\,b\,]$, *on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Propriété 8 (positivité)
Si $a \leqslant b$ *et* $f \geqslant 0$ *sur* $[\,a\,;\,b\,]$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Exercice XV

Calculez $\int_{-3}^{2}\sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice XVI (AEA, sujet 2003)

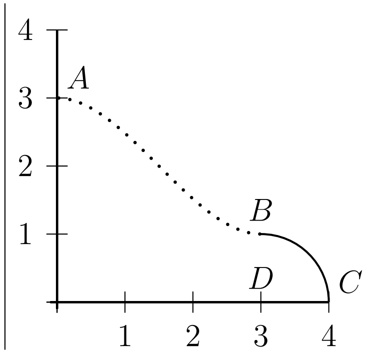
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$ (unité : 9 mm).

On considère les points $A\,(0\,;\,3)$, $B\,(3\,;\,1)$, $C\,(4\,;\,0)$ et $D\,(3\,;\,0)$.

La courbe ci-contre est constituée de deux parties :

– La partie en trait continu est un quart de cercle de centre D et de rayon 1.

– La partie en trait pointillé est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,3\,]$.



Partie A : détermination de *f*.

La partie en trait pointillé doit satisfaire les conditions suivantes :

- elle passe par A et par B ;
- la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses ;
- le raccordement avec la partie en trait continu doit être le plus régulier possible, c'est-à-dire que la tangente au cercle en B est aussi tangente à la courbe en pointillé.

1°) Traduire ces quatre contraintes par quatre conditions sur la fonction f et sa fonction dérivée f'.

2°) Vérifier que la fonction f_0 définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,3\,]$ par

$$f_0(x) = \frac{4}{27}\,x^3 - \frac{2}{3}\,x^2 + 3$$

satisfait ces quatre conditions.

On admet alors que l'arc $\widehat{AB}$ est la courbe représentative de f_0.

3°) Calculer l'aire, en cm^2, de la surface délimitée par la courbe et les deux axes (*arrondir à l'unité*).

Partie B : le plateau de table.

En faisant subir à la courbe une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses, puis à l'ensemble une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient une courbe fermée T.

Cette courbe T constitue, à l'échelle 1/5, le contour extérieur d'un plateau de table, réalisé dans un matériau de 6 cm d'épaisseur et dont la masse volumique est de 1,7 g/cm^3.

1°) Calculer le volume en cm^3 du plateau, à 1 cm^3 près.

2°) Calculer sa masse en kg (*arrondir à 3 décimales*).

4) Intégration par parties

Théorème 3 (intégration par parties)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$.

Alors on a : $\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)\,\mathrm{d}t}$.

Exemple 8 : on a

$$\begin{aligned}\int_2^4 (x.\ln x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}.\ln x\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= (8\ln 4 - 2\ln 2) - \int_2^4 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= 14\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^4\\ &= 14\ln 2 - (4-1) = 14\ln 2 - 3.\end{aligned}$$

Exercice XVII

Calculez, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1°) $I = \int_1^{\mathrm{e}} (x-2)\ln x\,\mathrm{d}x$	2°) $J = \int_{-\pi}^{0} \theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$
3°) $K = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$	4°) $L = \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$