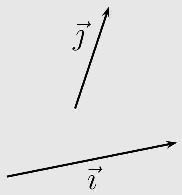
Cours et Exercices : Vecteurs

I. Bases. Coordonnées de vecteurs

— On additionne deux vecteurs en les mettant « bout-à-bout » :

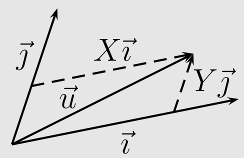
— Deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non nuls sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{\imath} = k.\vec{\jmath}$. Ils ont alors même direction (ils sont « parallèles »). On considère que le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

— Si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires alors ils forment une base du plan.



Propriété 1

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux nombres uniques X, Y tels que $\boxed{\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\imath}}$.



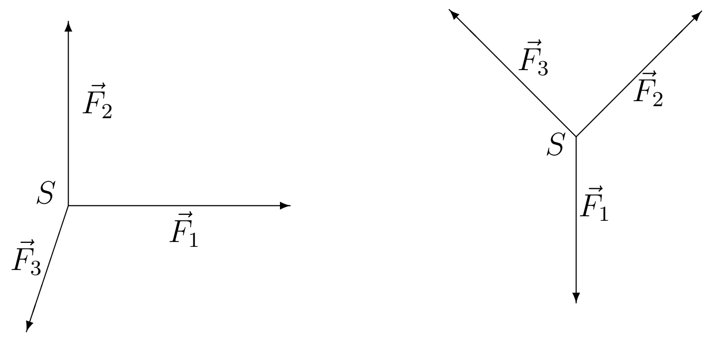
Définition

X, Y sont appelés coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exemple 1 : Si $\vec{u} = 2\vec{\jmath} - \vec{\imath}$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

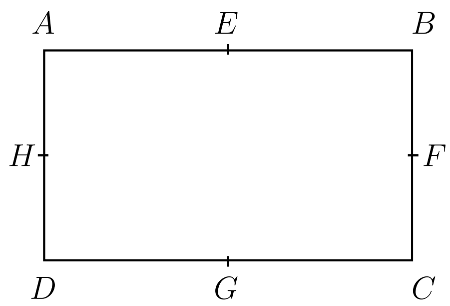
Exercice I (constructions)

Trois forces coplanaires s'exercent sur un solide S représenté par un point. Dessinez précisement la direction que prendra S.



Exercice II (coordonnées de vecteurs)

On considère un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont $AD = 4$ et $DC = 7$. Les points E, F, G, H sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Donnez les coordonnées des vecteurs suivants dans les bases spécifiées :

Bases \ Vecteurs	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{DA}$	$\overrightarrow{CE}$	$\overrightarrow{BH}$	$\overrightarrow{FA}$
$\left(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$
$\left(B; \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}\right)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$	$(\ldots;\ldots)$

Trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ forment une **base de l'espace** (étant choisis trois représentants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ de ces vecteurs, les quatre points A, B, C, D ne sont pas coplanaires).

Propriété 2

Soit $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ *une base de l'espace. Pour tout vecteur* $\vec{u}$*, il existe trois nombres uniques* X, Y, Z *tels que* $\boxed{\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}}$.

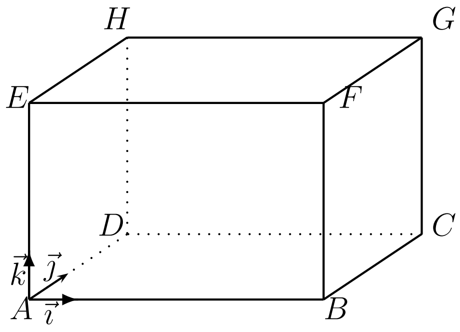
Définition

X, Y, Z sont appelés **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

Exemple 2 : Si $\vec{u} = 2\vec{\jmath} - \vec{\imath} + 3\vec{k}$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

Exercice III (coordonnées dans l'espace)

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède dont les dimensions sont $AB = 6$, $AD = 3$ et $AE = 4$.



1°) Placez les points I, J, K, L tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$,

$\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$,

$\overrightarrow{BL} = \frac{7}{3}\overrightarrow{BC}$.

2°) On se place maintenant dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \qquad \vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \qquad \vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

Propriétés 3

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$ *et* k *un réel. Alors :*

— $\vec{u} + \vec{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}X+X'\\Y+Y'\\Z+Z'\end{pmatrix}$

— $k.\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}kX\\kY\\kZ\end{pmatrix}$

— $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *non nuls sont* **colinéaires** *si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc si l'une des conditions suivantes est remplie :*
  – *il existe* k *tel que* $\boxed{X' = k.X}$, $\boxed{Y' = k.Y}$, $\boxed{Z' = k.Z}$
  – *les "produits en croix" sont nuls :* $\boxed{XY' - X'Y = 0}$ *et* $\boxed{XZ' - ZX' = 0}$.

Exercice IV

1°) Soient $\vec{u}\binom{2}{-5}$ et $\vec{v}\binom{-3}{2}$. Donnez les coordonnées de $-5\vec{u} + 3\vec{v}$.

2°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Sinon trouver p tel que $\vec{u}$ et $\vec{w}\binom{-3}{p}$ le soient.

3°) Les vecteurs $\vec{r}\begin{pmatrix}-3\\6\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}2\\-4\\-5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

II. Repères. Coordonnées de points

Définitions

— Un **repère** de l'espace est un quadruple $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ où O est un point et $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ une base.

— Les **coordonnées d'un point** M dans ce repère sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriété 4
Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{I \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\,;\,\frac{z_A + z_B}{2}\right)}.$$

Exercice V (calculs divers)
Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, soient

$A\,(3\,;\,2)$ $B\,(-2\,;\,1)$ $C\,(2\,;\,-2)$ $D\,(0\,;\,-1)$

1°) Faîtes une figure.

2°) Construisez le point E tel que $\overrightarrow{DE} = 6\vec{\jmath} - \vec{\imath}$. Donnez ses coordonnées.

3°) Démontrez que $ACBE$ est un parallélogramme.

4°) Donnez les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

5°) Dessinez, en partant du point D, le vecteur $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{AD}$.

6°) Même question avec $3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$.

7°) Déterminez, par le calcul, si les points B, C et D sont alignés (indication : penser aux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$).

Exercice VI (colinéarité, équations de droites dans le plan)
Soients, dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ du plan, les points

$A\,(-2\,;\,1)$, $B\,(2\,;\,2)$, $C\,(-1\,;\,-2)$, $D\,(5\,;\,-1)$.

1°) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

2°) a) Le point $E\,(6\,;\,2,5)$ appartient-il à la droite (AB) ?

b) Déterminez le nombre p tel que $F\,(6\,;\,p)$ soit sur (AB).

c) Á quelle condition un point $M\,(x\,;\,y)$ appartient-il à la droite (AB) ? *Cette condition est une équation de la droite* (AB).

3°) Calculez les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

III. Bases et repères orthonormés

Définitions

— Une base $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ est **orthonormée** si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

— Un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ est **orthonormé** si la base $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ est orthonormée.

Propriété 5
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace. Alors la norme de $\vec{u}$ (sa longueur) est égale à :

$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Propriété 6
Soient A $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et B $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ dans un repère orthonormé. Alors

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

Exercice VII (suite de l'exercice VI)
En utilisant uniquement des distances, déterminez les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice VIII
Avec la figure de l'exercice III ; on se place dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Placez sur la figure le point P de coordonnées $(-8/3\,;\,3\,;\,4)$.

2°) Donnez les coordonnées des points I, J, K, L dans ce repère.

3°) a) Calculer la distance DP.

b) Démontrer que le triangle FDP est rectangle.

4°) En déduire :

a) une mesure en degrés de l'angle $\widehat{PFD}$.

b) la distance entre le point D et la droite (PF).