Cours et exercices : Produit vectoriel

I. Orientation de l'espace

Soit $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ un repère orthogonal de l'espace. Ce repère peut, suivant sa configuration, définir deux orientations de l'espace :

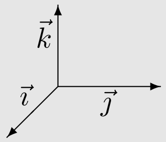


Figure 1

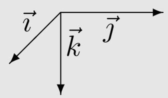


Figure 2

Dans la pratique, on choisit fréquemment l'orientation de la figure 1, celle qui correspond à la main droite : le pouce tendu a la direction de $\vec{\imath}$, l'index tendu celle de $\vec{\jmath}$ et le majeur plié a alors celle de $\vec{k}$.

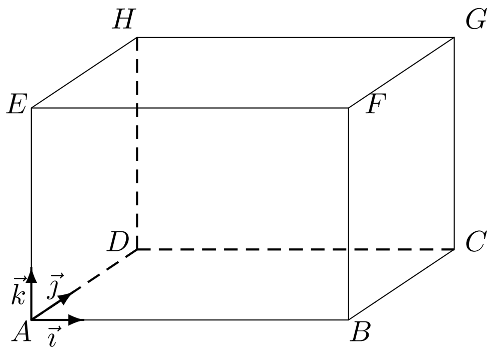
Triplet direct :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Le triplet $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})$ est **direct** s'il a la même orientation que le repère choisi.

Exercice I (orientation dans l'espace)

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède dont les dimensions sont $AB = 6$, $AD = 3$ et $AE = 4$. L'orientation de l'espace choisie est celle du repère $(A,\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ (le triplet $(\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ est donc direct).

Dire si les triplets suivants sont directs ou indirects :



a) $(\vec{k},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ b) $(\vec{\jmath},\,\vec{\imath},\,\vec{k})$ c) $(\vec{k},\,\vec{\jmath},\,\vec{\imath})$

d) $(\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE},\,\overrightarrow{EF})$ e) $(\overrightarrow{FE},\,\overrightarrow{FB},\,\overrightarrow{EH})$ f) $(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{GC})$

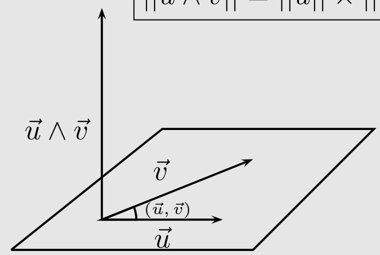
g) $(\overrightarrow{DA},\,\overrightarrow{BA},\,\overrightarrow{FB})$ h) $(\overrightarrow{BC},\,\overrightarrow{EF},\,\overrightarrow{HD})$

II. Définition du produit vectoriel

Définition : le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le (pseudo)vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

⋆ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;

⋆ sinon, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et tel que le triplet $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{u}\wedge\vec{v})$ est direct et de norme $\boxed{||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times|\sin(\vec{u},\vec{v})|}$.



Exemple 1 : Soit, dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, le vecteur $\vec{w}=\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}$. Il est orthogonal aux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ donc colinéaire à $\vec{k}$.
Le triplet $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{w})$ a la même orientation que le triplet $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (il est direct), le vecteur $\vec{w}$ a le même sens que $\vec{k}$.
Enfin, sa norme est $||\vec{w}|| = ||\vec{\imath}||\times||\vec{\jmath}||\times|\sin(\vec{\imath},\vec{\jmath})| = 1$.
Conclusion : $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}$.
On démontrerait de même que $\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}=-\vec{k}$; $\vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath}$, etc.

Exercice II (utilisation des règles de calcul)

Déterminez, sans calculs, les produits suivants :

$\vec{u}=\vec{\imath}\wedge\vec{k}$ $\vec{v}=\vec{k}\wedge\vec{\jmath}$ $\vec{w}=\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath}$ $\vec{t}=(2\vec{\imath})\wedge\vec{k}$

III. Quelques propriétés du produit vectoriel

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0} \qquad \vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u} \qquad \vec{u}\wedge(k\vec{v})=(k\vec{u})\wedge\vec{v}=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$$

Exercice III (utilisation des propriétés)
Déterminez les produits suivants :
a) $(\vec{\imath}+2\vec{k})\wedge\vec{\imath}$ b) $(\vec{\jmath}-\vec{k})\wedge(\vec{\jmath}+\vec{k})$ c) $(2\vec{k}+\vec{\jmath})\wedge(\vec{\imath}-3\vec{k})$

IV. Coordonnées d'un produit vectoriel

EXEMPLE 2 : Voici une première méthode pour trouver les coordonnées d'un produit vectoriel. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$.
Alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=(2\vec{\imath}-\vec{k})\wedge(3\vec{\imath})=6(\vec{\imath}\wedge\vec{\imath})-3(\vec{k}\wedge\vec{\imath})=-3\vec{\jmath}$
donc les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$.

En généralisant ce raisonnement, on obtient la :

Propriété 1
Soient $\vec{u}\,(X,Y,Z)$ et $\vec{v}\,(X',Y',Z')$. Les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ se calculent à l'aide de « produits en croix ». Voici les trois coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans l'ordre :

$\begin{array}{cc} \cancel{X} & \cancel{X'} \\ Y & Y' \\ Z & Z' \end{array}$ $\boxed{YZ'-Y'Z}$ $\begin{array}{cc} X & X' \\ \cancel{Y} & \cancel{Y'} \\ Z & Z' \\ X & X' \end{array}$ $\boxed{ZX'-Z'X}$ $\begin{array}{cc} X & X' \\ Y & Y' \\ \cancel{Z} & \cancel{Z'} \end{array}$ $\boxed{XY'-X'Y}$

Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $(YZ'-Y'Z,\ ZX'-Z'X,\ XY'-X'Y)$.
Remarque : attention à l'ordre des calculs, en particulier pour la seconde coordonnée.

EXEMPLE 3 : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Alors le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\times5-3\times3=1\\3\times(-2)-(-1)\times5=-1\\(-1)\times3-2\times(-2)=1\end{pmatrix}$.

Dans les exercices IV et V, on reprend les éléments de l'exercice I.

Exercice IV (calcul des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$)
1°) Calculez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ de deux façons différentes.
2°) Calculez les coordonnées des vecteurs suivants :
a) $\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BE}$ b) $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{HG}\wedge\overrightarrow{HB}$

V. Aire d'un triangle, d'un parallélogramme

⋆ L'aire du triangle ABC est égale à $\boxed{\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.

⋆ L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|}$.

Preuve :
Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
Alors l'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{AB\times CH}{2}$, or dans le triangle rectangle ACH, on a : $\sin\hat{A}=\dfrac{CH}{AC}$ donc $CH=AC\sin\hat{A}$; on en déduit que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{AB\times AC\times\sin\hat{A}}{2}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$.

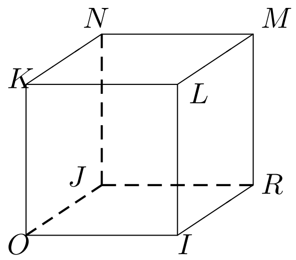
EXEMPLE 4 : Soient $A\,(-1\,;\,-3\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,-3\,;\,-1)$ et $C\,(-2\,;\,5\,;\,1)$. Calculons l'aire du triangle ABC. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\8\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}24\\5\\16\end{pmatrix}$ donc $||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||=\sqrt{857}$. L'aire est donc $\sqrt{857}/2$.

Remarque :
On peut alors facilement obtenir la distance entre un point C et une droite (AB), qui sera égale à $\dfrac{||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||}{AB}$.

Exercice V (aire d'un triangle)
1°) a) Calculer l'aire du triangle AHC.
b) En déduire la distance de H à la droite (AC).
2°) Calculer l'aire du triangle EFD.

Exercice VI (aires et volumes)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$. On considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M. La figure ci-contre représente ce cube. On note A le milieu de $[IL]$ et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.



1°) a) Déterminez les coordonnées des points A et B.

b) Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

c) Montrez alors que l'aire du triangle OAB est : $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

2°) Le point $C\left(1\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,1\right)$ appartient-il à (P) ? Justifiez votre réponse.

3°) On considère le tétraèdre $OABK$.

a) Montrez que le volume de ce tétraèdre est : $\dfrac{1}{9}$.

b) Calculez alors la distance du point K au plan (P).

Exercice VII (moment d'une force)

« Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point donné O est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point, souvent appelé pivot. »

Par analogie (avec le moment d'une force par rapport à un axe), une force exercée sur une porte la fera tourner de façon plus ou moins efficace, suivant l'intensité de la force et l'endroit où on applique la force.

Ce moment se définit ainsi : $\boxed{\mathscr{M}_O\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AB}}$ où B est le point d'application de la force.

On reprend les éléments de l'exercice I.

1°) a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire $\mathscr{M}_D(\overrightarrow{BC})$.

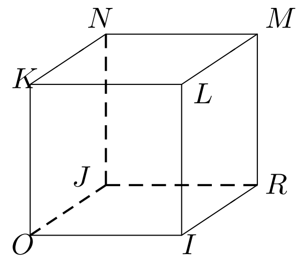
2°) Déterminer :

a) $\mathscr{M}_C(\overrightarrow{EB})$ b) $\mathscr{M}_H(\overrightarrow{DF})$ c) $\mathscr{M}_I(\overrightarrow{DC})$

(où I est le milieu de $[AB]$).

Exercice VI (aires et volumes)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$. On considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M. La figure ci-contre représente ce cube. On note A le milieu de $[IL]$ et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.



1°) a) Déterminez les coordonnées des points A et B.

b) Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

c) Montrez alors que l'aire du triangle OAB est : $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

2°) Le point $C\left(1\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,1\right)$ appartient-il à (P) ? Justifiez votre réponse.

3°) On considère le tétraèdre $OABK$.

a) Montrez que le volume de ce tétraèdre est : $\dfrac{1}{9}$.

b) Calculez alors la distance du point K au plan (P).

Exercice VII (moment d'une force)

« Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point donné O est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point, souvent appelé pivot. »

Par analogie (avec le moment d'une force par rapport à un axe), une force exercée sur une porte la fera tourner de façon plus ou moins efficace, suivant l'intensité de la force et l'endroit où on applique la force.

Ce moment se définit ainsi : $\boxed{\mathscr{M}_O\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AB}}$ où B est le point d'application de la force.

On reprend les éléments de l'exercice I.

1°) a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire $\mathscr{M}_D(\overrightarrow{BC})$.

2°) Déterminer :

a) $\mathscr{M}_C(\overrightarrow{EB})$ b) $\mathscr{M}_H(\overrightarrow{DF})$ c) $\mathscr{M}_I(\overrightarrow{DC})$

(où I est le milieu de $[AB]$).