Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

I. Définitions

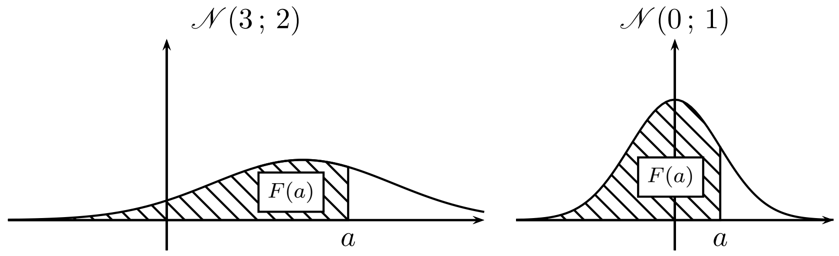
Définition
Soit X une variable aléatoire pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle.
X suit une **loi normale** (ou loi de Laplace Gauss) de paramètres μ et σ (où $\sigma > 0$) si $\boxed{P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x}$ où $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$

<u>Notation :</u> la loi normale de paramètres μ et σ est notée $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

Définition
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie par

$$\boxed{F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = P(X \leqslant a)}.$$

Exemple 1 :



II. Utilisation de la calculatrice

Deux fonctions sont à disposition :
– l'une donne la probabilité (« **c**umulative ») $\boldsymbol{p(a \leqslant X \leqslant b)}$;
– l'autre donne, pour une probabilité p, la valeur de a telle que $\boldsymbol{p(X \leqslant a) = p}$.

		$p(a \leqslant X \leqslant b)$	a t.q. $p(X \leqslant a) = p$
Casio	menu Stat, Dist, Norm	Ncd (F2)	InvN (F3)
TI	2nd var (distrib)	normalFrep(1) (a, b, μ, σ)	Fracnormale(2) (p, μ, σ)

(1) ou normalcdf (2) ou invNorm

Exemple 2 : Le QI d'une personne suit $\mathcal{N}(100;15)$. Compléter :
$p(85 \leqslant QI \leqslant 115) \simeq \dots\dots\dots$
$p(QI \geqslant 125) \simeq \dots\dots\dots$
$p(QI \leqslant \dots\dots\dots) \simeq 0,8$

<u>Remarque :</u> Pour tout a, $P(X = a) = 0$ donc $\boxed{P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b)}$.

Exemple 3 : Une machine produit des pièces circulaires. On choisit une pièce au hasard dans la production et on appelle X le diamètre de cette pièce. On suppose que X suit une loi normale d'espérance $m = 20$ cm et d'écart-type $\sigma = 2$. La pièce est utilisable si son diamètre est compris entre 19 cm et 21 cm. Alors, en utilisant la calculatrice ou Geogebra :
• $p(X < 22) \simeq 0,8413$
• $p(X \leqslant 19) \simeq 0,3085$.
• $p(X > 23,5) \simeq 0,0401$.
• quelle est la probabilité que la pièce ne soit pas utilisable ?
Réponse : soit A l'événement « la pièce n'est pas utilisable ». On a alors :
$p(A) = 1 - p(19 \leqslant X \leqslant 21) \simeq 0,617$.
• 90 % des pièces ont un diamètre inférieur à 22,56 cm.

III. Espérance, variance et écart-type

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ alors $\boxed{E(X) = \mu}$, $\boxed{V(X) = \sigma^2}$ et $\boxed{\sigma(X) = \sigma}$.

IV. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Sous certaines conditions (n suffisamment grand et p ni proche de 0, ni de 1), il est possible d'approcher une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ de mêmes caractéristiques. Les paramètres de cette loi normale sont alors $\boxed{\mu = np = E(X)}$ et $\boxed{\sigma = \sqrt{npq} = \sigma(X)}$.

Exemple 4 : X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(500;0,3)$. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi normale. Donner alors une valeur approchée de $p(X \geqslant 160)$ en utilisant cette approximation.

<u>Réponse :</u> Les deux paramètres de la loi normale sont $\mu = np = 150$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{105} \approx 10,25$ et la machine donne $P(X \geqslant 160) \simeq 0,1635$.