Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

I. Schéma de Bernoulli (jeu de « pile ou face »)

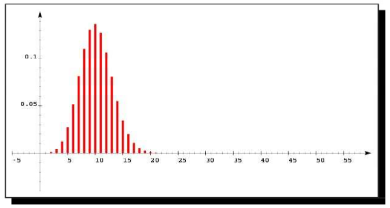
Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d'épreuves indépendantes et identiques ne pouvant déboucher chacune que sur deux éventualités (de probabilités respectives p et q donc $q = 1 - p$).
Remarque : ces éventualités sont parfois appelées « succès » et « échec ».

EXEMPLE 1 : L'expérience consistant à lancer 60 fois un dé et à regarder à chaque lancer si l'on a un 6 suit un schéma de Bernoulli : à chaque lancer, l'événement A : « le lancer a donné un 6 » est réalisé (avec une probabilité $p = \dfrac{1}{6}$) ou il ne l'est pas (avec une probabilité $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$).

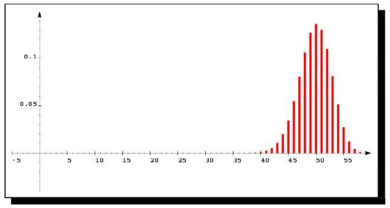
II. Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

1) Définitions

La variable aléatoire X égale au nombre de « succès » lors d'un schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, où n représente le nombre d'épreuves et p la probabilité de « succès » lors de chacune de ces épreuves. Cette loi est notée $\mathscr{B}(n, p)$.



loi binômiale $\mathscr{B}$ (60; 1/6)



loi binômiale $\mathscr{B}$ (60; 5/6)

Remarque : X suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ si :
- X peut prendre comme valeurs $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; n$
- la probabilité d'avoir k succès sur n épreuves est égale à :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots 3 \times 2 \times 1}\, p^k\,(1-p)^{n-k}$$

2) Utilisation de la calculatrice

Deux fonctions à ne pas confondre :
– la fonction de **p**robabilité, qui donne $p(X = k)$;
– la fonction de **rép**artition (ou « **c**umulative »), qui donne $p(X \leqslant k)$;

		$p(X = k)$	$p(X \leqslant k)$
Casio	menu Stat, Dist, Binom(1)	Bpd (F1)	Bcd (F2)
TI	2nd var (distrib)	binomFdp(2)(n, p, k)	binomFRep(3)(n, p, k)

(1) pour data, choisir Variable (F2)
(2) ou binompdf
(3) ou binomcdf

EXEMPLE 2 : Une usine produit des pièces en grande quantité. La probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit défecteuse est de 0,01. On prélève au hasard 50 pièces dans cette production. La production étant importante, on assimile ce tirage à un tirage avec remise.
Soit X le nombre de pièces défectueuses dans ce prélévement.
– Indiquer la loi suivie par X.
– Donner la probabilité d'obtenir 5 pièces défectueuses.
– Donner la probabilité d'obtenir au plus 2 pièces défectueuses.
– Donner la probabilité d'obtenir au moins 2 pièces défectueuses.

Réponses :
– Chaque tirage a deux issues : soit la pièce est défectueuse (avec une probabilité $p = 0,01$), soit elle ne l'est pas (avec une probabilité $q = 0,99$).
On répète ce tirage 50 fois de façon identique et indépendante (tirages avec remise). Donc X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $n = 50$ et $p = 0,01$.
– Avec la calculatrice : $p(X = 5) \simeq 1,35.10^{-4}$.
– Avec la calculatrice : $p(X \leqslant 2) \simeq 0,9866$.
– On remarque que $p(X \geqslant 2) = 1 - p(X \leqslant 1) \simeq 1 - 0,9106 \simeq 0,0894$.

III. Espérance, variance et écart type

$\boxed{E(X) = np}$ $\quad$ $\boxed{V(X) = npq = np(1-p)}$ $\quad$ et $\quad$ $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{npq}}$.

EXEMPLE 2 :
Pour l'exemple précédent, ceci donne $E(X) = np = 50 \times 0,01 = 0,5$ (on peut s'attendre à 0,5 pièce défectueuse sur un prélévement de 50 pièces), $V(X) = npq = 50 \times 0,01 \times 0,99 = 0,495$ et $\sigma(X) \approx 0,704$.