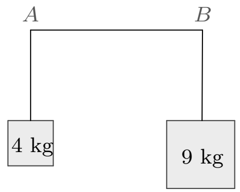
Barycentre de deux ou trois points

I. Barycentre de deux points

1) Définition

Exemple 1 :
On considère une tige $[AB]$ aux extrémités de laquelle on fixe deux masses, l'une de 4 kg, l'autre de 9 kg.
En quel point G de la tige faut-il la poser pour qu'elle soit en équilibre ?



Début de réponse :
On remarque d'abord que G est plus près de B que de A ($GA > GB$).
Loi des leviers d'Archimède : « Des grandeurs quelconques s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leur poids. »
Autrement dit : $4AG = 9GB$ donc, ici, $4\overrightarrow{AG} = 9\overrightarrow{GB}$ d'où $4\overrightarrow{GA} + 9\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Propriété 1
Soient deux points du plan (ou de l'espace) A et B, associés à des coefficients (des masses) α et β.
Si $\alpha + \beta \neq 0$ alors il existe un point G unique vérifiant $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$.

Définition
G est appelé **barycentre** des **points pondérés** (A, α) et (B, β).

Remarques :
⋆ le barycentre de (A, α) et (B, β) appartient à la droite (AB) ;
⋆ quand $\alpha = \beta$, on dit que G est l'**isobarycentre** des points A et B ; c'est tout simplement le milieu du segment $[AB]$.

2) Construction géométrique

Propriété 2
Si G est le barycentre de (A, α), (B, β) alors $\boxed{\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}}$.

Exemple 1 : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{9}{4+9}\overrightarrow{AB} = \dfrac{9}{13}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de positionner G.

3) Coordonnées d'un barycentre de deux points

Propriété 3
Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) alors les coordonnées de G sont :

$$\boxed{x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}} \quad ; \quad \boxed{y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}} \quad ; \quad \boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}}.$$

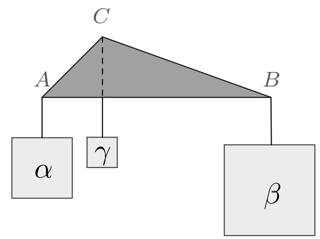
Remarque : on fait simplement les moyennes des coordonnées de A et B, pondérées des coefficients α, β.

Exemple 2 : Soient $A(-4; 3)$ et $B(2; -5)$. Alors les coordonnées de G, barycentre de $(A, -1)$, $(B, 7)$ sont :
$x_G = \dfrac{-1 \times (-4) + 7 \times 2}{-1 + 7} = 3$ et $y_G = \dfrac{-1 \times 3 + 7 \times (-5)}{-1 + 7} = -\dfrac{19}{3}$.

II. Barycentre de trois points

1) Définition

Même problématique que précédemment, mais avec une plaque triangulaire, aux sommets duquelle on attache trois masses.



Propriété 4
Soient trois points du plan (ou de l'espace) A, B et C, associés respectivement à des coefficients α, β et γ. Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors il existe un point G unique vérifiant $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$.

Définition
G est appelé **barycentre** des **points pondérés** (A, α), (B, β) et (C, γ).
Remarque : si $\alpha = \beta = \gamma$ alors G est l'isobarycentre des points A, B et C ; c'est le centre de gravité du triangle ABC.

2) Constructions géométriques

a) Par une somme de vecteurs

Propriété 5

Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) alors $\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$.

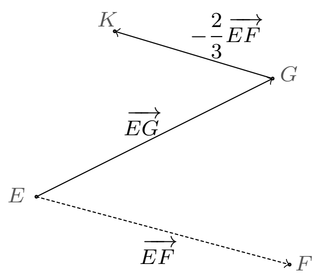
EXEMPLE 3 :

Construire K, barycentre de $(E,2)$, $(F,-2)$ et $(G,3)$.

Réponse :

$\overrightarrow{EK}=\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{EF}+\dfrac{3}{3}\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EG}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$.

(on construit, en partant de E, le vecteur $\overrightarrow{EG}$ puis le vecteur $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$).



b) Barycentre partiel

Propriété 6

Soit G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).

Alors $\boxed{G \text{ est aussi le barycentre de } (G_1,\alpha+\beta) \text{ et } (C,\gamma)}$, *où G_1 est le barycentre de (A,α) et (B,β).*

Remarque : G_1 est appelé un barycentre partiel.

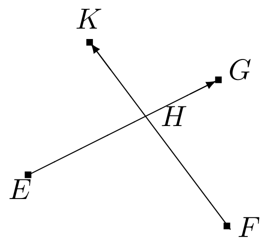
EXEMPLE 2 :

Construction du point K de l'exemple précédent.

On peut construire le point H, barycentre de $(E,2)$, $(G,3)$ en écrivant : $\overrightarrow{EH}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{EG}$.

Ce barycentre partiel H est alors affecté des masses de E et de G $(2+3=5)$.

K est alors le barycentre de $(H,5)$, $(F,-2)$, on a donc $\overrightarrow{FK}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{FH}$.



3) Coordonnées d'un barycentre de trois points

Propriété 7

Si G est le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) alors les coordonnées de G sont :

$\boxed{x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$; $\boxed{y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$; $\boxed{z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$.

Remarque : on fait simplement les moyennes des coordonnées de A, B et C, pondérées des coefficients α, β et γ.

EXEMPLE 4 : Soient $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$ et $C(7;8;9)$. Alors les coordonnées de G, barycentre de $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,3)$ sont :

$$x_G=\frac{-1\times1+2\times4+3\times7}{-1+2+3}=7,5\,;$$

$$y_G=\frac{-1\times2+2\times5+3\times8}{-1+2+3}=8\,;$$

$$z_G=\frac{-1\times3+2\times6+3\times9}{-1+2+3}=9,5$$

donc $G\ (7,5\,;\,8\,;\,9,5)$.